

2012 AIME

2位 000
60 00 00
4

1. 有九個人一起吃飯，有三種套餐可供選擇，每人各點一種套餐，其中三人點了牛肉套餐、三人點了雞肉套餐、三人點了魚肉套餐。某服務生隨意的為這九人送餐，試問恰好僅有一位客人得到他所點的套餐的方法共有多少種？

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28

2. 考慮所有三位數 abc ，其中 $a \neq 0$ 、 $c \neq 0$ ， a, b, c 不須相異且 abc 與 cba 都是 4 的倍數。試問滿足上述條件的三位數共有多少個？

40

3. 已知某等差數列各項的和為 715，若將第一項加 1、第二項加 3、第三項加 5，一般而言，第 k 項加第 k 個正奇數，則所得到的新等差數列各項的和為 836。試問原來等差數列的第一項、正中間那一項與末項三項的和為多少？

4. 設複數 z 與 w 滿足 $z^{13} = w$ ， $w^{11} = z$ ，且 z 的虛部為 $\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)$ ，其中 m 與 n 為互質的正整數，且 $m < n$ 。試求 $n = ?$

5. 設 x 、 y 、及 z 為正數滿足

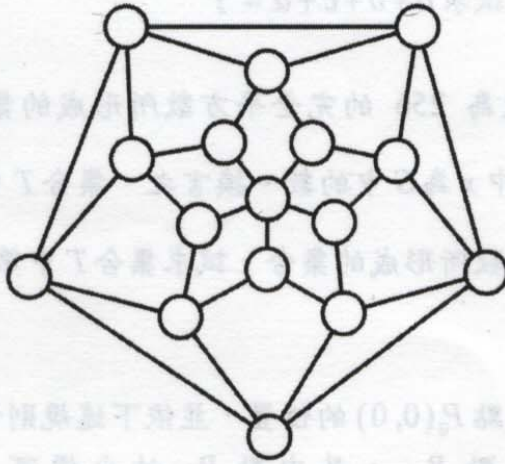
$$2\log_x(2y) = 2\log_{2x}(4z) = \log_{2x^4}(8yz) \neq 0$$

已知 xy^5z 可以表示為 $\frac{1}{2^q}$ 的形式，其中 p 與 q 為互質的正整數，試求 $p+q = ?$

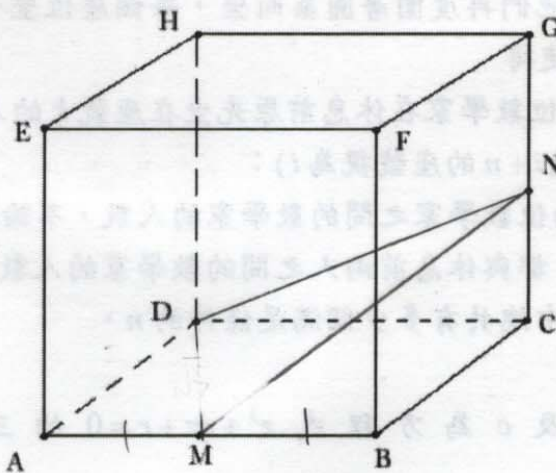
6. 用二進位表示法，集合 B 中的元素都是用五個 0 與八個 1 所組成的 13 位數，此集合中的數允許前幾位數為 0。試求將集合 B 中的任意兩數相減所有可能的運算中，共有多少次所得的答案是 1。

7. 小布與阿丹離開道奇市開始他們的旅程，為了儘快而行，他們交替用走路的或乘騎他們唯一的一匹馬赤兔，他們行進的方式如下：開始時小布用走的，阿丹騎馬；當阿丹到達他們路程之中的第一個拴馬柱時——為了簡單起見，所有拴馬柱離道奇市均為整數公里——他將赤兔拴在柱上，開始用走的；當小布走到拴赤兔的地方，他開始騎馬，當他超越阿丹到達下一個拴馬柱時，他將赤兔拴在柱上，再開始用走的；他們持續用這種交替的方法而行。赤兔、小布、及阿丹的行進速率分別為每小時 6、4、及 2.5 公里；當小布與阿丹在途中的一個整數公里的里程碑第一次相遇時，他們離開道奇市 n 公里、花了 t 分鐘。試求 $n+t = ?$

8. 在下面網路圖的十六個圓圈中，每個圓圈站一位學生，並將 3360 個銅板全部分給這十六位學生。這些學生同時進行下列的分送過程一次，每個學生將他的銅板全部平均分送給在網路中與他相連的同學。若分送後每個學生仍擁有與分送前一樣多的銅板，則網路圖中最中央那位學生原來有多少個銅板？



9. 如圖，邊長為 1 的正立方體 $ABCDEFGH$ ，被一個通過 \overline{AB} 、 \overline{CG} 中點 M 、 N 及頂點 D 的平面分割成兩個立體區域。若其中較大區域的體積可以表示為 $\frac{p}{q}$ 的形式，其中 p 與 q 為互質的正整數，則 $p+q=?$



10. 設 $\triangle ABC$ 為直角三角形，其中角 C 為直角， D 、 E 為 \overline{AB} 上的兩點，其中點 D 介於 A 與 E 之間，使得 \overline{CD} 與 \overline{CE} 三等分 $\angle C$ 。若 $\frac{\overline{DE}}{\overline{BE}} = \frac{8}{15}$ ，則 $\tan B$ 可以表示為 $\frac{m\sqrt{p}}{n}$ ，其中 m 與 n 為互質的正整數，且 p 是正整數，它不能被任何質數的平方所整除。試求 $m+n+p=?$

11. 給定三個半徑分別為 3、4、5 的同心圓，考慮所有邊長為 s ，它的三個頂點分別在這三個圓的圓周上的正三角形。若這些正三角形最大可能的面積可以表示為 $a + \frac{b}{c}\sqrt{d}$ ，其中 a 、 b 、 c 、 d 均為正整數， b 與 c 互質，且 d 不能被任何質數的平方所整除。試求 $a+b+c+d = ?$
12. 設 S 是所有末三位數為 256 的完全平方數所形成的集合；而集合 T 是所有 $\frac{x-256}{1000}$ 的集合，其中 x 為 S 中的數。換言之，集合 T 中的數是將集合 S 中的每一個數截去末三位數所形成的集合。試求集合 T 中第十小的數除以 1000 的餘數。
13. 有一隻青蛙開始時在點 $P_0(0,0)$ 的位置，並依下述規則作一序列的跳躍：從點 $P_n(x_n, y_n)$ 青蛙跳至點 P_{n+1} ，其中點 P_{n+1} 的坐標可以是 (x_n+7, y_n+2) 、 (x_n+2, y_n+7) 、 (x_n-5, y_n-10) 、或 (x_n-10, y_n-5) 四個之中的任何一個。若共有 m 個點 (x, y) ，其中 $|x|+|y| \leq 100$ ，是青蛙可經過一序列跳躍後到達的點，則 m 除以 1000 的餘數為多少？
14. 有 n 位數學家圍著一張圓桌，分別坐在依順時針方向標示著 $1, 2, 3, \dots, n$ 的座位上。在休息後，他們再度圍著圓桌而坐，每個座位坐一人，這些數學家發現有一個正整數 a 使得
- (1) 對於每個 k ，每位數學家在休息前原先坐在座號 k 的人，在休息後坐在座號 ka (其中座號 $i+n$ 的座號視為 i)；
 - (2) 在休息後任何兩位數學家之間的數學家的人數，不論按順時針方向數、或逆時針方向數，都與休息前兩人之間的數學家的人數不同。
- 試求在 $1 < n < 1000$ 中總共有多少個滿足條件的 n 。
15. 設複數 a 、 b 及 c 為方程式 $z^3 + qz + r = 0$ 的三個根，且滿足 $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 250$ 。在複數平面對應於 a 、 b 、 c 的三點可形成一個直角三角形的三個頂點。若此直角三角形的斜邊長為 h ，則 $h^2 = ?$

2012 年美國國際數學邀請賽(AIME)答案

題號	答案
1	216
2	040
3	195
4	071
5	049
6	330
7	279
8	280
9	089
10	018
11	041
12	170
13	373
14	332
15	375