

證明：有理數  $\frac{q}{p}$  可化為有限小數  $\Leftrightarrow p = 2^\alpha \times 5^\beta$ ，其中  $\alpha, \beta \in N \cup \{0\}$

俞克斌老師 編授

**充分條件的證明**：

當有理數  $\frac{q}{p}$  可化為有限小數，則存在  $\frac{q}{p} \times 10^n = r \in N$ ，其中  $n \in N$

$$\Rightarrow q \times 10^n = pr \Rightarrow p \mid q \times 10^n \xrightarrow{(p,q)=1} p \mid 10^n$$

$\Rightarrow p = 2^\alpha \times 5^\beta$ ，其中  $\alpha, \beta \in N \cup \{0\}$ ，且  $0 \leq \alpha, \beta \leq n$ 。得證。

**必要條件的證明**：

當有理數  $\frac{q}{p}$  的分母  $p = 2^\alpha \times 5^\beta$ ，其中  $\alpha, \beta \in N \cup \{0\}$ ，

$$\Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{q}{2^\alpha \times 5^\beta} = \frac{q \times 2^{\beta-\alpha}}{2^\beta \times 5^\beta} \quad (\text{當 } \alpha < \beta) \quad \text{或} \quad \frac{q \times 5^{\alpha-\beta}}{2^\alpha \times 5^\alpha} \quad (\text{當 } \alpha > \beta)$$

$$\Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{q \times 2^{\beta-\alpha}}{10^\beta} \quad \text{或} \quad \frac{q \times 5^{\alpha-\beta}}{10^\alpha}，\text{均為有限小數。得證。}$$