臺北市立松山家商九十七學年度教師甄選初試

數學科試題卷

一、填充題：每格 6 分，共 24 分

1. 設 $A(1,0)$， $B(b,0)$ 為坐標平面上兩點，其中 $b>1$；若拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 上有一點 P，使 ΔABP 為正三角形，則 $b=$________
2. 已知方程式 $x^5-32=0$ 的四個相異虛根為 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$，設 $f(x)=x^3+x^2+1$，則 $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(\delta)=$________
3. 連續投擲一個均勻骰子三次，第一次出現 x 點，第二次出現 y 點，第三次出現 z 點，求滿足 $x+y+z\le 8$ 的機率＝________
4. 連續投擲一個均勻骰子二次，第一次出現 x 點，第二次出現 y 點，求 $\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$ 的期望值＝________

二、計算題：每題 8 分，共 24 分

1. 設 $a_n=\sum_{k=97}^{2008}k^n$，求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 之值
2. 求滿足 $C^n_r:C^n_{r+1}:C^n_{r+2}=1:m:2m$ 的整數解組 (m,n,r)，其中 $n\ge r+2$，$r\ge 0$，$m>0$
3. 設球面 $S_1: x^2+y^2+z^2=1$ 與球面 $S_2:(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ 交於一圓 C，若球面 S 包含圓 C 且被 x 軸所截線段長為 4，求球面 S 的方程式

三、計算及證明題：共 52 分

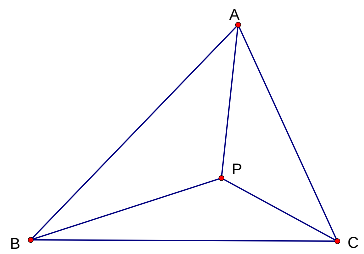
1. 銳角 ΔABC 中，若 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三邊上的高，試證：ΔABC 的垂心為 ΔDEF 的內心　　（8 分）
2. 已知函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 連續，在開區間 (a,b) 可微且 $f(a)=f(b)$，則在開區間 (a,b) 中存在一實數 c，使得 $f'(c)=0$。若將上述之條件「$f(a)=f(b)$」去除，試證：在開區間 (a,b) 中存在一實數 c，使得 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。　　（8 分）
3. 設 $E_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1$，$E_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2$，$E_3: a_3x+b_3y+c_3z=d_3$ 為空間中三平面，令

   $\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}$，$\Delta_z=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}$，試證：若此三平面相異且相交於一直線，則 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$　　（10 分）
4. ΔABC 中，設 a,b,c 分別為其三內角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊，Δ 為其面積，而 R 為其外接圓半徑，

   (1) 試證：$\cot A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4\Delta}$　　（6 分）

   (2) 利用(1)證明：若 $\cot A,\cot B,\cot C$ 成等差數列，則 a^2,b^2,c^2 亦成等差數列　　（6 分）

   (3) 如圖：設 ΔABC 內部一點 P，使得 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$，試利用(1)證明：$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$　　（6 分）



   (4) 試證：$a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}\cdot\Delta$　　（8 分）