陸、 筆試試題及參考解答

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

筆試試題（一）

注意事項：

（1）時間：2 小時（13:30～15:30）
（2）配分：每題皆為 35 分
（3）不可使用計算器
（4）請將答案依序寫在答案卷內

一、設 ΔABC 為直角三角形，AD 為 ΔABC 斜邊上的高，若 M,N 分別為 $\Delta ABD,\Delta ACD$ 的內心，連接 M,N 交 AB,AC 於 K,L；試證 ΔABC 面積 $\geq 2\,\Delta AKL$ 的面積。

二、設 N_0 表示所有非負整數. 若函數 $f:N_0\to N_0$ 滿足 $f(99)=2010$，且對任意的非負整數 m, n, $mf(n)+nf(m)=(m+n)f(m^2+n^2)$ 恆成立，則 $f(2010)$ 之值為何?

三、令 m 為正整數，已知 2^{2010} 能整除 99^m-1。請問 m 的最小的值為何?

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：設ΔABC為直角三角形，AD為ΔABC斜邊上的高，若M,N分別為$\Delta ABD,\Delta ACD$的內心，連接M,N交AB,AC於K,L；試證ΔABC面積$\geq 2\,\Delta AKL$的面積。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">■ 自 編　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="3">□ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　■ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難　■ 中等　□ 易</td><td>編 號</td><td>筆試(一) 第一題</td></tr>
</table>

解答：由於$\angle MDA=\angle NDC=45^\circ,\angle MAD=\frac{1}{2}\angle BAD=\frac{1}{2}\angle ACD=\angle NCD,$

故$\Delta ADM\sim\Delta CDN\Rightarrow\frac{DM}{DN}=\frac{DA}{DC}=\frac{AB}{AC}$，又由於$\angle MDN=\angle BAC=90^\circ$，

而有$\Delta DMN\sim\Delta ABC$，故

$\angle DNM=\angle ACB\Rightarrow\angle ALK=\angle NDC=45^\circ\Rightarrow\Delta AKL$

為等腰；

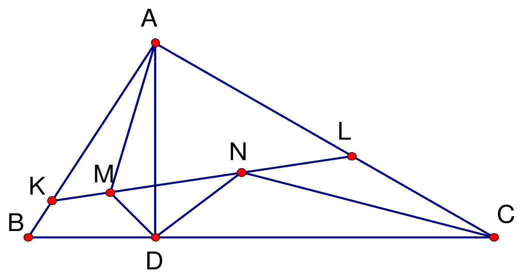
因此，$\angle AKM=\angle APM=45^\circ$，又由於$\angle KAM=\angle DAM$及

$AM=AM$，

可得　$\Delta AKM\cong\Delta ADM\Rightarrow AD=AK=AL$，

因此，$\frac{a\Delta ABC}{a\Delta AKL}=\frac{AB\times AC}{AD^2}=\frac{AB\times AC}{BD\times DC}=\frac{AB\times AC^2}{BD\times DC\times AC}=\frac{AB(AD^2+DC^2)}{BD\times DC\times AC}$

$=\frac{BD(AD^2+DC^2)}{BD\times DC\times AD}=\frac{AD}{DC}+\frac{DC}{AD}\geq 2$，故得証.



九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：設 N_0 表示所有非負整數. 若函數 $f:N_0 \to N_0$ 滿足 $f(99)=2010$，且對任意的非負整數 m, n, $mf(n)+nf(m)=(m+n)f(m^2+n^2)$ 恆成立，則 $f(2010)$ 之值為何?</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">☐ 自 編 ☐ 改編於：2002 CMO</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="3">■ 代 數 ☐ 數 論 ☐ 組 合 ☐ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難 ☐ 中等 ■ 中偏易</td><td>編 號</td><td>筆試(一) 第二題</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：我們將證明: $f(m)\equiv 2010$，$\forall\, m\in N_0$.
如果 f 不是常數函數，則可選取 $m,n\in N_0$

使得 $f(m)-f(n)>0$ 是最小的正數，則
$f(n)=\dfrac{mf(n)+nf(n)}{m+n}<\dfrac{mf(n)+nf(m)}{m+n}<\dfrac{mf(m)+nf(m)}{m+n}=f(m)$.

所以，$f(n)<f(m^2+n^2)<f(m)$，因而
$0<f(m^2+n^2)-f(n)<f(m)-f(n)$，
此與 m,n 的選取矛盾！故，f 是常數函數.

由於 $f(99)=2010$，
所以 $f(m)\equiv 2010$，$\forall\, m\in N_0$，因而 $f(2010)=2010$</td></tr>
</table>

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：令 m 為正整數，已知 2^{2010} 能整除 $99^{m}-1$。請問 m 的最小的值為何?</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">■ 自 編 □ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　別</td><td colspan="3">□ 代 數 ■ 數 論 □ 組 合 □ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難 ■ 中等 □ 易</td><td>編 號</td><td>筆試(一) 第三題</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：m 的最小的值 2^{2008}。
假設 $m=2^{n}k$，其中 k 是個奇數。設 a=99，已知
$a^{m}-1=a^{(2^n)k}-1=(a^{(2^n)}-1)[a^{(2^n)(k-1)}+a^{(2^n)(k-2)}+....a^{(2^n)}+1]$。
而且中括號內有 k 項，而每個項皆是奇數，
所以中括號內的和是個奇數。
因此 2^{2010} 能整除 $a^{m}-1$ 若且唯若 2^{2010} 能整除 $a^{(2^n)}-1$。
因此不妨假設 $m=2^{n}$，得到 $a^{m}-1=a^{(2^n)}-1=(a^{2^{(n-1)}}+1)[a^{2^{(n-1)}}-1]=....=(a-1)\Pi_{0\leqq j\leqq n-1}(a^{(2^j)}+1)$。
由於 $a=99\equiv 3(\mathrm{mod}\ 8)$，所以 $(a-1)=98=2(49)$，$(a+1)=100=4(25)$
及 $j\geq 1$ 時，$a^{(2^j)}+1\equiv(3)^{(2^j)}+1\equiv(3)^{(2^{(j-1)})}+1=2(\mathrm{mod}\ 8)$。
所以 $j\geq 1$ 時，$a^{(2^j)}+1$ 只能被 2 整除， 而不能被 4 整除。
因此有 $a^{m}-1$ 的所有 2 的因數是 $8(\Pi_{1\leqq j\leqq n-1}(2))=2^{n+2}$。
所以 $n+2\geqq 2010$，即 $n\geqq 2008$。
所以 m 的最小的值是 2^{2008}。</td></tr>
</table>

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

筆試試題（二）

注意事項：

（1）時間：2 小時（16:00～18:00）
（2）配分：每題皆為 35 分
（3）不可使用計算器
（4）請將答案依序寫在答案卷內

一、設 I 為 ΔABC 的內切圓圓心，P 為 ΔABC 內的任一點。證明：

若 $\angle BPC = \angle BIC$ ，則 $\overline{AP} \geq \overline{AI}$ 。

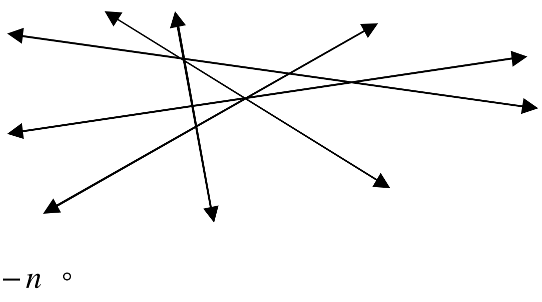
二、試確定所有的實數三元序組（a, b, c）使得下列不等式(*)：

$$|ax + by + c - \sqrt{4 - x^2 - y^2}| \leq 1 \cdots\cdots\cdots (*)$$

對任意滿足 $x^2 + y^2 \leqq 4$ 的實數 x, y 恆成立。

三、平面上有 n 條互不平行的直線，共有 m 個交點，其中僅兩直線通過的交點個數為 k ，而由相鄰的交點所截開的線段個數為 S 。例如：下圖為 5 條直線、6 個交點的特例，其中

$n = 5, m = 6, k = 4$ ，而線段個數 $S = 9$ 。



試證： $S \geq 3m - k - n$ 。

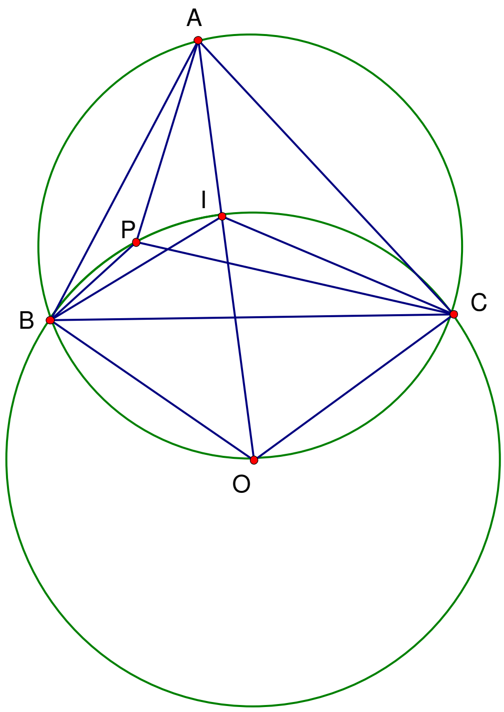
九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：設 I 為 ΔABC 的內切圓圓心，P 為 ΔABC 內的任一點。證明：若 $\angle BPC=\angle BIC$ ，則 $\overline{AP}\ge\overline{AI}$ 。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">■ 自 編 □ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="3">□ 代 數 □ 數 論 □ 組 合 ■ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難 ■ 中等 □ 易</td><td>編 號</td><td>筆試(二) 第一題</td></tr>
</table>

解答：證明：作 ΔBIC 的外接圓 O。因 $\angle BPC=\angle BIC$ ，則 P 點落在圓 O 上。

因 $\angle BOC=2(\angle IBC+\angle ICB)=\angle ABC+\angle ACB=\pi-\angle BAC$ ，

得 A、B、O、C 四點共圓。



因 $\overline{OB}=\overline{OC}$ ，得 $\angle OBC=\angle OCB$ 。

再由 A、B、O、C 四點共圓，

得 $\angle OAB=\angle OCB$，$\angle OAC=\angle OBC$。

故 $\angle OAB=\angle OAC$ ；即直線 OA 平分 $\angle BAC$ 。

因 I 爲 ΔABC 的內切圓圓心，

得 A、I、P 三點共線，
故 $\overline{AP}+\overline{PO}\ge\overline{AO}=\overline{AI}+\overline{IO}$ ，從而得 $\overline{AP}\ge\overline{AI}$ 。

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：試確定所有的實數三元序組（a, b, c） 使得下列不等式(*)：$\lvert ax+by+c-\sqrt{4-x^2-y^2}\rvert \le 1 \cdots\cdots\cdots (*)$ 對任意滿足 $x^2+y^2 \le 4$ 的實數 x, y 恆成立。			
試題來源	■ 自 編　□ 改編於：		
類　　別	□ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　■ 幾何不等式		
難 易 度	□ 難　■ 中偏難　□ 易	編 號	筆試(二) 第二題

解答：a = b = 0, c = 1 或 (0, 0, 1) 恰有一組。首先將不等式(*)變形為

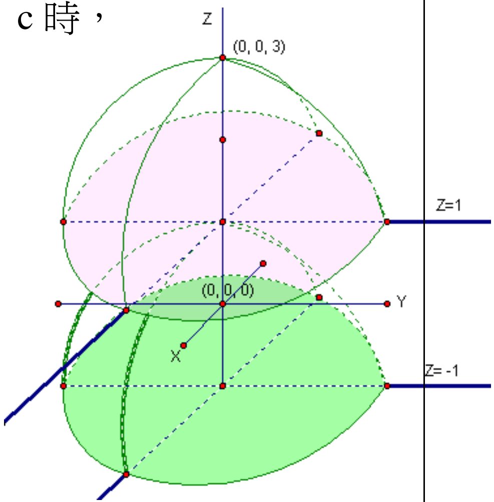
$$\sqrt{4-x^2-y^2}-1 \le ax+by+c \le \sqrt{4-x^2-y^2}+1 \cdots\cdots\cdots (**) \forall (x,y), x^2+y^2 \le 4$$

此時意味著 z = ax + by + c 的平面，在 c 時，

介於二個上半球面

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}+1,\quad (x,y)\ni x^2+y^2\le 4$

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}-1,\quad (x,y)\ni x^2+y^2\le 4$



恰可發現平面 z = 1 是包含半球面

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}+1$的底面且與

球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}-1$

相切於 (0, 0, 1),

故平面 z = 1 即 c = 1, a = b = 0 滿足

$\sqrt{4-x^2-y^2}-1 \le c \le \sqrt{4-x^2-y^2}+1$

對 (x, y), $x^2+y^2 \leqq 4$ 恆成立, 故 (0, 0, 1) 為 (**) 之一組解。

進一步說明 (0, 0, 1) 是惟一的一組解：

若 (a, b, c) 為 (**) 之一組解時，則取 x=y=0 代入 (**) 知：

$\sqrt{4}-1 \leqq c \leqq \sqrt{4}+1$

即 $1 \leqq c \leqq 3$

底下証明：$1< c \leqq 3$ 時 (**) 無三元實數組 (a, b, c) 之解，

而當 c = 1 時 (**) 之解為 a=b=0：

(1) 當 $1< c \leqq 3$ 時，設 a, b, c 為 (**) 之一組解，取

x = 0, y = 2 代入得　$-1 \leqq 2b+c \leqq 1$

取 x = 0, y = –2 代入得　$-1 \leqq -2b+c \leqq 1$

故得 $2b+c \leqq 1$ 且 $-2b+c \leqq 1$，===> $2b<0$ 且 $-2b<0$ →←

令當 x = ±2, y=0 時，可知 a < 0 且 a > 0 亦得矛盾。

故知， c > 1 時，(**) 之解 (a, b, c) 不存在。

(2) 當 c = 1 時，設 a, b, c 為 (**) 之一組解，同上可得

$b \leqq 0$ 且 $b \geqq 0$,　$a \leqq 0$ 且 $a \geqq 0$

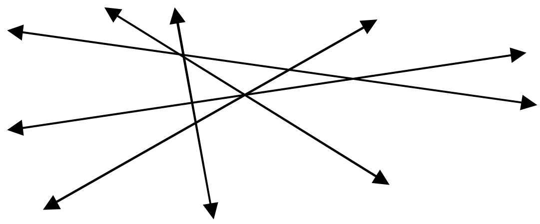
得 $a = b = 0$。

合併以上得證 (**), 即 (*) 之三元實數組 (a, b, c)之解

爲 (0, 0, 1) 恰爲其唯一之解。

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：平面上有 n 條互不平行的直線，共有 m 個交點，其中僅兩直線通過的交點個數為 k，而由相鄰的交點所截開的線段個數為 S 。例如：下圖為 5 條直線、6 個交點的特例，其中 $n=5, m=6, k=4$ ，而線段個數 $S=9$ 。

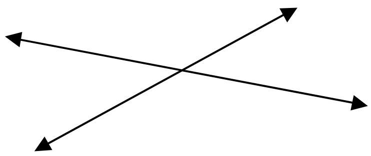


試證： $S \geq 3m-k-n$ 。

試題來源	□ 自 編 ■ 改編於：2010TRML 思考賽改編		
類　　別	□ 代 數 □ 數 論 ■ 組 合 □ 幾 何		
難 易 度	□ 難 ■ 中等 □ 易	編 號	筆試(二) 第三題

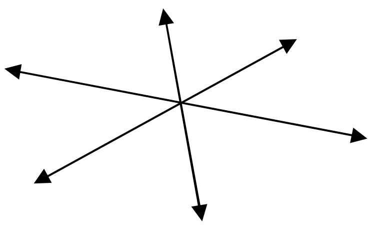
解答：以各交點爲主軸計算所有的線段及射線數：

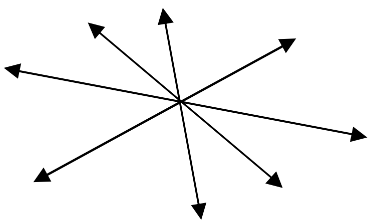
(1) 恰兩直線通過的交點，每一交點提供 4 條線段或射線，合計貢獻 $4k$ 條線段



(2) 三條或三條以上的直線通過的交點，每一交點提供至少 6 條線段或射線，合

至少 $6(m-k)$ 條線段或射線。





總計至少貢獻 $4k+6(m-k)=6m-2k$ 條線段或射線，其中恰有 $2n$ 條是射線(

因爲每一條直線的兩端各出現一條射線)。因此，剩下的線段數至少爲 $6m-2$

又這些線段在兩端點計數時各重複算了一次，故

$$S \geq \frac{6m-2k-2n}{2}=3m-k-n$$

柒、 口試試題及參考解答

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

口 試 試 題

注意事項：

(1) 試卷共 2 題，參賽者可先在本試卷上作答，思考時間 20 分鐘；
(2) 攜帶本試卷到口試 A 組應試，答辯時間 20 分鐘，並繳回本試卷；
(3) 口試 A 組答辯結束後，到口試 B 組繼續應試，答辯時間 20 分鐘。

一、試求實數 r 之值使 $\sqrt{11-r}+\sqrt{11+r}$ 為一整數。

二、試證 $(n+1)^n < 3n^n$ 對每一正整數 n 都成立 。

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：試求實數 r 之值使 $\sqrt{11-r}+\sqrt{11+r}$ 為一整數。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">■ 自 編　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="3">□ 代 數　■ 數 論　□ 組 合　□ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難　□ 中等　■ 易</td><td>編 號</td><td>口試 第一題</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：令 $\sqrt{11-r}+\sqrt{11+r}=n$, n 爲整數;
將上式平方後可得 $22+2\sqrt{121-r^2}=n^2 \Rightarrow \sqrt{121-r^2}=\frac{n^2}{2}-11$,
由於 $\sqrt{121-r^2}\geq 0 \Rightarrow \frac{n^2}{2}-11\geq 0 \Rightarrow n>4$,又
$\sqrt{121-r^2}\leq 11 \Rightarrow \frac{n^2}{2}-11\leq 11 \Rightarrow n^2\leq 44 \Rightarrow n<7$
而有 $4<n<7$;當 $n=5 \Rightarrow \sqrt{121-r^2}=\frac{25}{2}-11=\frac{3}{2} \Rightarrow r=\pm\frac{5}{2}\sqrt{19}$.
當 $n=6 \Rightarrow \sqrt{121-r^2}=\frac{36}{2}-11=7 \Rightarrow r=\pm\sqrt{170}$.</td></tr>
</table>

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：試證 $(n+1)^n < 3n^n$ 對每一正整數n都成立 。			
試題來源	□ 自 編 □ 改編於：參考$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ 設計		
類 別	□ 代 數 □ 數 論 □ 組 合 □ 幾 何		
難 易 度	□ 難 ■ 中等 □ 易	編 號	口試 第二題

解答：

$$
\begin{aligned}
(n+1)^n &= n^n + c_1^n n^{n-1} + \cdots c_k^n n^{n-k} + \cdots c_n^n \\
&= n^n + n^n + \frac{n(n-1)}{2!} n^{n-2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-k+1)}{k!} n^{n-k} \\
&\quad + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!} \\
&= n^n + n^n + \frac{n^n}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{n^n}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) \\
&\quad + \cdots + \frac{n^n}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\
&= n^n + n^n(1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})) \\
&< n^n + n^n(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}) \\
&< n^n + n^n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})(\because p! \ge 2^{p-1}) \\
&< 3n^n
\end{aligned}
$$

捌、 獨立研究試題及參考解答

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

獨立研究試題（一）

注意事項：

（1）三題中自選兩題作答，並請註明題號

（2）時間：2 小時（8:10～10:10）

（3）配分：每題皆為 7 分

（4）不可使用計算器

（5）請將答案寫在答案卷內

一、已知橢圓 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦點分別為 F_1、F_2，過 F_1 的直線交橢圓於 B、D 兩點，過 F_2 的直線交橢圓於 A、C 兩點，且 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$，垂足為 P。試求四邊形 $ABCD$ 的面積的最小值。。

二、已知正數 a,b,c 滿足條件 $a+b+c=3$，試證：$(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le a^2b^2c^2$

三、設 a,b 為正整數。若 $a+2b$ 為 41 的倍數，且 $a-2b$ 為 43 的倍數，求 $a+b$ 的最小值。

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="5">題目：已知橢圓 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦點分別為 F_1、F_2，過 F_1 的直線交橢圓於 B、D 兩點，過 F_2 的直線交橢圓於 A、C 兩點，且 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$，垂足為 P。試求四邊形 $ABCD$ 的面積的最小值。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="4">□ 自 編　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="4">□ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　□ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難　□ 中等　□ 易</td><td>編 號</td><td colspan="2">獨立研究(一)第一題</td></tr>
<tr><td colspan="5">解答：(i) 當 $\overline{BD}$ 的斜率 k 存在且 $k\neq 0$ 時，$\overline{BD}$ 的方程為 $y=k(x+1)$，
代入橢圓方程 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，並化簡得 $(3k^2+2)x^2+6k^2x+3k^2-6=0$.
設 $B(x_1，y_1)$，$D(x_2，y_2)$，則
$x_1+x_2=-\frac{6k^2}{3k^2+2}$，$x_1x_2=\frac{3k^2-6}{3k^2+2}$，
$\overline{BD}=\sqrt{1+k^2}\cdot\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{(1+k^2)\cdot\left[(x_2+x_2)^2-4x_1x_2\right]}=\frac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{3k^2+2}$；
因為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 相交於點 p，且 $\overline{AC}$ 的斜率為 $-\frac{1}{k}$,
所以，$\overline{AC}=\frac{4\sqrt{3}\left(\frac{1}{k^2}+1\right)}{3\times\frac{1}{k^2}+2}=\frac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{2k^2+3}$.
四邊形 $ABCD$ 的面積
$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{AC}=\frac{24(k^2+1)^2}{(3k^2+2)(2k^2+3)}\geq\frac{24(k^2+1)^2}{\left[\frac{(3k^2+2)+(2k^2+3)}{2}\right]^2}=\frac{96}{25}$.
當 $k^2=1$ 時，上式等號成立.
(ii) 當 $\overline{BD}$ 的斜率 $k=0$ 或斜率不存在時，四邊形 $ABCD$ 的面積 $S=4$.
綜合以上所論，四邊形 $ABCD$ 的面積的最小值為 $\frac{96}{25}$.</td></tr>
</table>

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：已知正數 a,b,c 滿足條件 $a+b+c=3$，試證：$(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le a^2b^2c^2$。			
試題來源	□ 自 編 □ 改編於：		
類 別	□ 代 數 □ 數 論 □ 組 合 □ 幾 何		
難 易 度	□ 難 □ 中等 □ 易	編 號	獨立研究(一)第二題

解答：為不失一般性，不妨假設 $a\le b\le c$。

(1)如果 $a+b\le c$, 由 $a+b+c=3\le 2c\Rightarrow c\ge\frac{3}{2}$。

又 $a+b+c=3\ge 3a\Rightarrow a\le 1<\frac{3}{2},\therefore b<\frac{3}{2}$。

因此 $(3-2a)(3-2b)(3-2c)<0\le a^2b^2c^2$。

(2)如果 $a+b>c$, 令 $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$, 所以

$(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le a^2b^2c^2\Leftrightarrow 8(s-a)(s-b)(s-c)\le a^2b^2c^2$。

我們可考慮 a,b,c 構成一三角形的三邊長，由三角形面積公式知，

令三角形面積為 A，則 $A^2=s(s-a)(s-b)(s-c)=(\frac{abc}{4R})^2$，

其中 R 為三角形外接圓的半徑。

因此 $(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le a^2b^2c^2\Leftrightarrow 8(s-a)(s-b)(s-c)\le a^2b^2c^2\Leftrightarrow$
$8A^2\le s(abc)^2=16sR^2A^2\Rightarrow 1\le 2sR^2\Leftrightarrow 1\le 3R^2$

只需證明：$a+b+c=2s=3\le 3\sqrt{3}R\Rightarrow 1\le 3R^2$，

利用正弦定理及合分比性質，得

$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$，又

$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以 $2R=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}\ge\frac{2}{3\sqrt{3}}(a+b+c)\Rightarrow 3\sqrt{3}R\ge a+b+c$，

其中 A,B,C 表示此三角形之三內角， 故得証。

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：設 a,b 為正整數。若 $a+2b$ 為 41 的倍數，且 $a-2b$ 為 43 的倍數，
求 $a+b$ 的最小值。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">□ 自 編　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="3">□ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　□ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難　□ 中等　□ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究(一)第三題</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：因 $a+2b$ 為 41 的倍數，得 $21a+b=21(a+2b)-41b$ 亦為 41 的倍數；
同樣的，因 $a-2b$ 為 43 的倍數，
得 $21a+b=21(a-2b)+43b$ 為 43 的倍數。
因 41 與 43 互質，故 $21a+b$ 為 $41\times 43=1763$ 的倍數。
令 $21a+b=1763n$ ，則
$21(a+b)=1763n+20b=(21\times 84)n-n+21b-b=(21\times 84)n+21b-(n+b)$ ，
從而得 $n+b$ 為 21 的倍數。
故 $a+b=83n+20(n+b)/21\geq 83+20=103$ 。
當 $n=1$ ，$b=20$ 時，$a+b=103$ 為最小，這時 $a=83$ 。
檢驗 $a+2b=83+40=123=3\times 41$ ，$a-2b=83-40=43$ 合乎所求。
因此 $a+b$ 的最小值為 103。</td></tr>
</table>

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

獨立研究試題（二）

注意事項：

（1）三題中自選兩題作答，並請註明題號
（2）時間：2 小時（10:20～12:20）
（3）配分：每題皆為 7 分
（4）不可使用計算器
（5）請將答案寫在答案卷內

一、是否在平面上存在 2010 個頂點使得

（1）任意三點不共線

（2）任意二點的距離為無理數

（3）任意三點構成的三角形之面積為有理數。

二、設 $0 \leqq \theta, \varphi \leqq 2\pi$，試確定 $(\cos\theta-3-2\cos\varphi)^2+(\sin\theta-4-2\sin\varphi)^2$ 的最大值與最小值。

三、將 $1,2,\cdots,12$ 中的奇數與偶數配對，可以配成 6 對，我們以 $\{(1,a_1),(3,a_3),(5,a_5),(7,a_7),(9,a_9),(11,a_{11})\}$ 表示，其中 $a_1,a_3,\cdots,a_{11}$ 是 $2,4,\cdots,12$ 的一種排列。若要求對每一個 i，$i=1,3,\cdots,11$，a_i 必須與 i 互質，求符合此條件的 $(a_1,a_3,\cdots,a_{11})$ 的個數。

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：是否在平面上存在 2010 個頂點使得
(1) 任意三點不共線
(2) 任意二點的距離為無理數
(3) 任意三點構成的三角形之面積為有理數。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">☐ 自 編 ☐ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="3">☐ 代 數 ☐ 數 論 ☐ 組 合 ☐ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難 ☐ 中等 ☐ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究(二)第一題</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：(1) 取 2010 個頂點 (k,k^2) 其中 $k=1,2,\cdots,2010.$ 顯然任三點不共線

(2) $\overline{(i,i^2)(j,j^2)}=\sqrt{(i-j)^2+(i^2-j^2)^2}=|i-j|\sqrt{1+(i+j)^2}\notin Q$

(3) $(i,i^2),(j,j^2),(k,k^2)$ 之面積為
$\frac{1}{2}(k-i)(k^2+i^2)-\frac{1}{2}(j-i)(j^2+i^2)-\frac{1}{2}(k-j)(k^2+j^2)\in Q$</td></tr>
</table>

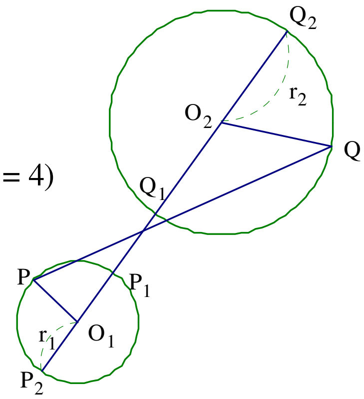
九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：	設 $0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi$，試確定 $(\cos\theta-3-2\cos\varphi)^2+(\sin\theta-4-2\sin\varphi)^2$ 的最大值與最小值。		
試題來源	□ 自 編 □ 改編於：		
類 別	□ 代 數 □ 數 論 □ 組 合 □ 幾 何		
難 易 度	□ 難 □ 中等 □ 易	編 號	獨立研究(二)第二題

解答：任給兩相離圓(O_1, r_1), 圓(O_2, r_2)，P, Q 分別爲 O_1, O_2 圓上的任兩點，則 $\overline{O_1O_2}-(r_1+r_2)\leq\overline{PQ}\leq\overline{O_1O_2}+(r_1+r_2)$ 且當直線 O_1O_2 交圓 O_1 於 P_1、P_2，交圓 O_2 於 Q_1、Q_2 時，如圖所示，則

$$\overline{P_2Q_2}=\overline{O_1O_2}+(r_1+r_2),\ \overline{P_1Q_1}=\overline{O_1O_2}-(r_1+r_2)$$

考慮圓 O_1：$x^2+y^2=1$，O_2：$(x-3)^2+(y-4)^2=4$，
(亦可考慮圓 O_1：$(x-3)^2+(y-4)^2=1$，O_2：$x^2+y^2=4$)



其上的參數可分別表示成 P($\cos\theta$, $\sin\theta$), Q($3+2\cos\varphi$, $4+2\sin\varphi$)

而 $\overline{PQ}=\sqrt{(\cos\theta-3-2\cos\varphi)^2+(\sin\theta-4-2\sin\varphi)^2}$

故 $\overline{P_1Q_1}\leq\overline{PQ}\leq\overline{P_2Q_2}$

而 $P_2Q_2=O_1O_2+r_1+r_2=5+1+2=8$, $P_1Q_1=O_1O_2-(r_1+r_2)=5-1-2=2$.

故得 $(\cos\theta-3-2\cos\varphi)^2+(\sin\theta-4-2\sin\varphi)^2$ 的最大值爲 $P_2Q_2^2=64$，

而最小值爲 $P_1Q_1^2=4$。

注：取 $\tan\theta=4/3$[θ 爲第三象限角]，$\tan\varphi=4/3$[φ 爲第一象限角]時，得 $\sin\theta=-4/5$，$\cos\theta=-3/5$，$\sin\varphi=4/5$，$\cos\varphi=3/5$ 代入得最大值爲 64，
同樣的，$\tan\theta=4/3$[θ 爲第一象限角]，$\tan\varphi=4/3$[φ 爲第三象限角]時，
代入得最大值爲 4

注：本題亦可用偏微分作，顯然具有某些的複雜度與難度。

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：將$1,2,\cdots,12$中的奇數與偶數配對，可以配成 6 對，我們以$\{(1,a_1),(3,a_3),(5,a_5),(7,a_7),(9,a_9),(11,a_{11})\}$表示，其中$a_1,a_3,\cdots,a_{11}$是$2,4,\cdots,12$的一種排列。若要求對每一個$i$，$i=1,3,\cdots,11$，$a_i$必須與 i 互質，求符合此條件的$(a_1,a_3,\cdots,a_{11})$的個數。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">☐ 自 編　☐ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="3">☐ 代 數　☐ 數 論　☐ 組 合　☐ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難　☐ 中等　☐ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究(二)第三題</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：首先我們有以下幾個觀察：
（1）$i=1,7,11$時，a_i可為任意偶數。
（2）a_3須為 6, 12 以外的偶數。
（3）a_5須為 10 以外的偶數。
（4）a_9須為 6, 12 以外的偶數。
令A_3表示違反(2)的所有配對方法所成的集合，即a_3為 6 或 12 的所有$(a_1,a_3,\cdots,a_{11})$所成的集合；類似的，令A_5表示$a_5=10$的所有$(a_1,a_3,\cdots,a_{11})$所成的集合，A_9表示a_9為 6 或 12 的所有$(a_1,a_3,\cdots,a_{11})$所成的集合。以下將計算$A_3\cup A_5\cup A_9$的元素個數，利用取捨原理（inclusion-exclusion principle）：
$\left|A_3\cup A_5\cup A_9\right|=\left|A_3\right|+\left|A_5\right|+\left|A_9\right|-\left|A_3\cap A_5\right|-\left|A_5\cap A_9\right|-\left|A_3\cap A_9\right|+\left|A_3\cap A_5\cap A_9\right|$
其中 $\left|A_3\right|=2\cdot 5!$, $\left|A_5\right|=5!$, $\left|A_9\right|=2\cdot 5!$, $\left|A_3\cap A_5\right|=2\cdot 4!$, $\left|A_5\cap A_9\right|=2\cdot 4!$,
$\left|A_3\cap A_9\right|=2\cdot 4!$, $\left|A_3\cap A_5\cap A_9\right|=2\cdot 3!$
因此
$\left|A_3\cup A_5\cup A_9\right|=5\cdot 5!-6\cdot 4!+2\cdot 3!=468$</td></tr>
</table>

未加任何條件的配對方法有 $6!=720$ 種，

因此符合條件的配對方法數為 $720-468=252$ 種。