# 2012 年(入學)法國高等學院預備班考題參考解答　　王啟光老師編講

1. 求 $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ 的實數解。

【參考解答】$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{32}\quad ,n\in Z$

先求出在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 的解。

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\cos 8x = 2\cos^2 4x - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos\frac{\pi}{4}$

此時 $x = \frac{\pi}{32}$

故 $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{32}\quad ,n\in Z$ 。

2. 若 $x$ 為非零實數，且 $x+\frac{1}{x}$ 為整數。試證對任意自然數，$x^n+\frac{1}{x^n}$ 也是整數。

【參考證明】

令 $x+\frac{1}{x}=m$ ，

$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=m^2-2\in Z$

且由 $x^2+1=mx \quad\Rightarrow\quad x^2=mx-1$ 可以得到遞迴關係式

$x^n+\frac{1}{x^n}=m(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}})-(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}})$ ，

故對任意自然數，$x^n+\frac{1}{x^n}$ 也是整數。

3. ($a$) 證明對所有自然數 $n$，$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$ 。
($b$) 若 $A$ 是整數且 $0\le A\le (n+1)!-1$，證明可以找到 $n$ 個自然數 $a_1,\cdots,a_n$ 滿足 $0\le a_k\le k$ ，並使得 $A=a_1\cdot 1!+\cdots+a_n\cdot n!$ 。
($c$) 試證($b$)中的表現式是唯一的。

【參考證明】

$(a)$

$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!$

$=(2-1)\cdot 1!+(3-2)\cdot 2!+\cdots+(n+1-1)\cdot n!$

$=(n+1)!-1$

$(b)$

若 $A=1=1\cdot 1!$

假設 $0\le A\le (n+1)!-1$ 都可以找到這樣的 $a_1,\cdots,a_n$ ；

那麼對於 $(n+1)!\le A\le (n+2)!-1$

令 $a_{n+1}$ 為 $A$ 除以 $(n+1)!$ 的商，餘數為 $B$，有 $0\le a_{n+1}\le n+1$

那麼 $0\le B\le (n+1)!-1$，由假設存在一組 $b_1,\cdots,b_n$ 使得 $B=b_1\cdot 1!+\cdots+b_n\cdot n!$ ，

所以 $A=b_1\cdot 1!+\cdots+b_n\cdot n!+a_{n+1}\cdot (n+1)!$

由數學歸納法得到命題成立。

$(c)$

若 $A=a_1\cdot 1!+\cdots+a_n\cdot n!=b_1\cdot 1!+\cdots+b_n\cdot n!$ ，且滿足 $0\le a_k\le k$ 與 $0\le b_k\le k$ ，

那麼 $a_1\cdot 1!+\cdots+a_{n-1}\cdot (n-1)!\le n!-1$ 且 $b_1\cdot 1!+\cdots+b_{n-1}\cdot (n-1)!\le n!-1$ ，

考慮將 $A$ 除以 $n!$ 的商可得 $a_n=b_n$ 。

接著就有 $a_1\cdot 1!+\cdots+a_{n-1}\cdot (n-1)!=b_1\cdot 1!+\cdots+b_{n-1}\cdot (n-1)!$ ，

同上方法可得 $a_{n-1}=b_{n-1}$ 。

如此繼續，就可以得到 $a_k=b_k$ ， $k=1,2,\cdots,n$ ，故其表示方法唯一。

4. 若 $x_1,\cdots,x_n$ 是 $n$ 個非零實數，使得 $(n-1)\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2\le (\sum_{k=1}^{n}x_k)^2$ 成立，試證 $x_1,\cdots,x_n$ 皆同號。

【參考證明】

$$(n-1)\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2\le (\sum_{k=1}^{n}x_k)^2=\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2+2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$$

$$(n-2)\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2\le 2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$$

針對某特定項 $x_m$ 作整理，將右式中含有 $x_m$ 的留下，其他移至左邊，會有

$$(n-2)\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2-2\sum_{1\le i<j\le n;i,j\ne m}x_ix_j\le 2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$$

然後左式進行配方，因為每個 $x_k$ 都出現 $n$-2 次，所以得到

$$\sum_{1\le i,j\le n;i,j\ne m}(x_i-x_j)^2+(n-2){x_m}^2\le 2x_m\sum_{1\le k\le n;k\ne m}x_k$$

$$2x_m\sum_{k=1}^{n}x_k\ge n{x_m}^2>0$$

故每個 $x_m$ 都跟 $\sum_{k=1}^{n}x_k$ 同號，且知 $\sum_{k=1}^{n}x_k\ne 0$ ，於是 $x_1,\cdots,x_n$ 皆同號。

5. 在三角形 $ABC$ 中，設 $a=BC$ 、 $b=CA$ 以及 $c=AB$ ，記 $\angle A=\alpha$ 、 $\angle B=\beta$ 以及 $\angle C=\gamma$ ，並假設三角形 $ABC$ 的面積為 $S$。

(*a*) 將 $a^2$ 用 $(b-c)^2$ 、 $S$ 和 $\tan(\alpha/2)$ 表示。

(*b*) 證明 $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 。

【參考解答】

(*a*)

餘弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha=(b-c)^2+2bc(1-\cos\alpha)$

面積 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ ，所以 $bc=\dfrac{2S}{\sin\alpha}$ ，代入上式

$$a^2=(b-c)^2+4S\times\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=(b-c)^2+4S\times\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

故 $a^2=(b-c)^2+4S\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 。

(*b*)

同理 $b^2=(c-a)^2+4S\tan\dfrac{\beta}{2}$ 、 $c^2=(a-b)^2+4S\tan\dfrac{\gamma}{2}$ ；

三式相加

$$a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4S(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2})$$

只要證明 $\tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\dfrac{\beta}{2}+\tan\dfrac{\gamma}{2}\geq\sqrt{3}$ 即可

因為 $\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\gamma}{2}$

兩邊取 tan，就有 $\tan(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2})=\tan(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\gamma}{2})=\cot\dfrac{\gamma}{2}$

$$\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}$$

所以 $\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}+\tan\dfrac{\beta}{2}\tan\dfrac{\gamma}{2}+\tan\dfrac{\gamma}{2}\tan\dfrac{\alpha}{2}=1$

$$(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2})^2\geq 3(\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2})=3$$

所以 $\tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\dfrac{\beta}{2}+\tan\dfrac{\gamma}{2}\geq\sqrt{3}$ 。

6. 假設$\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}$是平面上三個單位向量，並且假設它們不在相同的半平面。試證$\left\|\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_3}\right\|\le 1$。

【參考證明】

假設α、β、γ分別是$\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}$ 、 $\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}$ 、 $\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{x_1}$之間的夾角，因為它們不在相同的半平面，所以有$0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$且$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$。

$$\left\|\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_3}\right\|^2=1+1+1+2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$$

$$=3+2[2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos^2\frac{\gamma}{2}-1]$$

$$=1+4(-\cos\frac{\gamma}{2})(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\gamma}{2})$$

$$=1-8\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}<1$$

所以$\left\|\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_3}\right\|\le 1$。

7. $ABCD$是平面$P$上的一個平行四邊形，證明可以在空間中找到一個正方形$A'B'C'D'$，使得$A',B',C',D'$在平面$P$上的投影點分別為$A,B,C,D$。

【參考證明】

不失一般性假設$P$是$xy$平面，並假設各點坐標$A(0,0,0),B(a,0,0),D(b,c,0)$，那麼$C(a+b,c,0)$。

取$A'=A(0,0,0)$，

再假設$B'(a,0,p)$， $D'(b,c,q)$，並且要求$A'B'=A'D'$以及$\angle D'A'B'=90°$，

$$\begin{cases}a^2+p^2=b^2+c^2+q^2\\ \quad ab+pq=0\end{cases}$$

重新整理成$\begin{cases}p^2+(-q^2)=b^2+c^2-a^2\\ \quad p^2(-q^2)=-a^2b^2\end{cases}$

這表示$p^2$和$-q^2$是方程式$x^2-(b^2+c^2-a^2)x-a^2b^2=0$的兩根，

判別式$(b^2+c^2-a^2)^2+4a^4b^4$顯然為正，且兩根積為負，故知此方程式有一正根與一負根，正好給$p^2$和$-q^2$，所以可以找到兩組$(p,q)$的實數解。

此時再令$C'$為$(a+b,c,p+q)$，那麼$A'B'C'D'$為平行四邊形、兩鄰邊相等、一內角為直角，於是就是正方形；並且$A,B,C,D$分別是$A',B',C',D'$在$xy$平面的投影點，就滿足題目的所有要求。

8. 試證對所有自然數 $n$ 都有 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}2^{-k}=2^{n}$ 。

【參考證明】

令 $a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}2^{-k}$

那麼 $a_0=1$ ， $a_1=1+2\times\frac{1}{2}=2$

$$a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1+k}{k}2^{-k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n+1}\left\{\binom{n+k}{k}+\binom{n+k}{k-1}\right\}\times 2^{-k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+k}{k}2^{-k}+\binom{n+n+1}{n+1}\times 2^{-(n+1)}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+k}{k-1}2^{-k}$$

$$=a_n+\frac{1}{2}\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1+k}{k}2^{-k}+\frac{1}{2}\times\binom{n+1+n+1}{n+1}\times 2^{-(n+1)}$$

$$=a_n+\frac{1}{2}a_{n+1}$$

故 $a_{n+1}=2a_n$

也就有 $a_n=2^{n}$ 。