國立霧峰農工九十四學年度教師甄選數學科試題

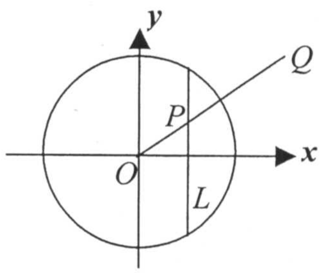
第一部份：選擇、填充或簡答題，每題完全答對各得 8 分，共 72 分。
除第 1、2 題以外其餘 3~9 題未完全答對者不給分；2~9 題答錯不倒扣。

1. (多選；各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分；每答錯一個選項，倒扣 2 分) 設 f,g：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 均為可微分函數，以下敘述何者恆成立？
   (a) 若 $f(x)\ge g(x)$ 對所有 $x\in\mathbb{R}$ 均成立，則 $f'(x)\ge g'(x)$ 對所有 $x\in\mathbb{R}$ 亦成立
   (b) 若 $f'(x)\ge g'(x)$ 對所有 $x\in\mathbb{R}$ 均成立，則 $f(x)\ge g(x)$ 對所有 $x\in\mathbb{R}$ 亦成立
   (c) 若 $f'(x)\ge g'(x)$ 對所有 $x\in(0,1)$ 均成立，則 $f(1)-g(1)\ge f(0)-g(0)$ 必成立
   (d) 若 $f(x)\ge g(x)$ 對所有 $x\in[0,1]$ 均成立，則 $\int_0^1 f(x)dx\ge\int_0^1 g(x)dx$ 必成立

2. 設一數列 $<a_n>$ 滿足 $a_1=3,\ a_2=7$，且 $a_{2n+1}=2a_{2n}-a_{2n-1},\ a_{2n+2}=3a_{2n+1}-a_{2n}$ 對任意正整數 n 都成立；試分別求 a_{94},a_{2005} 被 3 除所得的餘數。(答對各得 4 分)

3. 橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上給定兩點 $A(-4,0)$ 與 $B(0,-3)$，求橢圓上另一點 C 使 ΔABC 面積為最大，此最大值為何？

4 如右圖所示，Γ 表示以原點 O 為圓心之單位圓。當 P 為異於 O 的點時，定義 P 對 Γ 的對稱點為射線 $\overrightarrow{OP}$ 上滿足 $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=1$ 的點 Q。試求圓 Γ 內的線段 L: $x=\frac{1}{2}$ 上的點對 Γ 之對稱點所成集合之方程式(需寫出坐標 x 之限制範圍)。

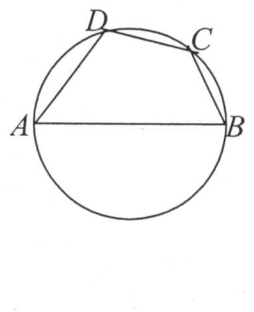


5. 以 $\varsigma=\cos\frac{2\pi}{15}+i\sin\frac{2\pi}{15}$ 表 1 的一個真正 15 次方根，f 為一整係數非零多項式，且知 $f(\varsigma)=0$；試問滿足此條件且次數最低的 f 之次數為若干？

6. 四面體 $ABCD$ 之稜長分別為 $\overline{AB}=a,\ \overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=5,\ \overline{CD}=4$，當 a 變動(使得 $ABCD$ 為一四面體)時，求 $ABCD$ 體積之最大可能值。

7. 棋力相當之甲、乙兩人參加一項棋賽，約定先贏四局者為勝(和局不計)，勝方可獨得獎金 2000 元。在甲贏兩局、乙贏一局後因故無法續賽，主辦單位決定依兩人可獲勝之機率將 2000 元獎金分給兩人，試問甲可得多少元？

8. 如右圖所示(此為示意圖，邊長非實際值)：四邊形 $ABCD$ 內接於一圓，其中 $\overline{AB}=2$ 為圓的直徑，且 $\overline{BC}=\frac{2}{3},\ \overline{CD}=\frac{1}{2}$，試求 $\overline{DA}$ 之值。



9. 試求實數 a、b、c 使得 $\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2+bx+c}{(x-1)^2}=3$。