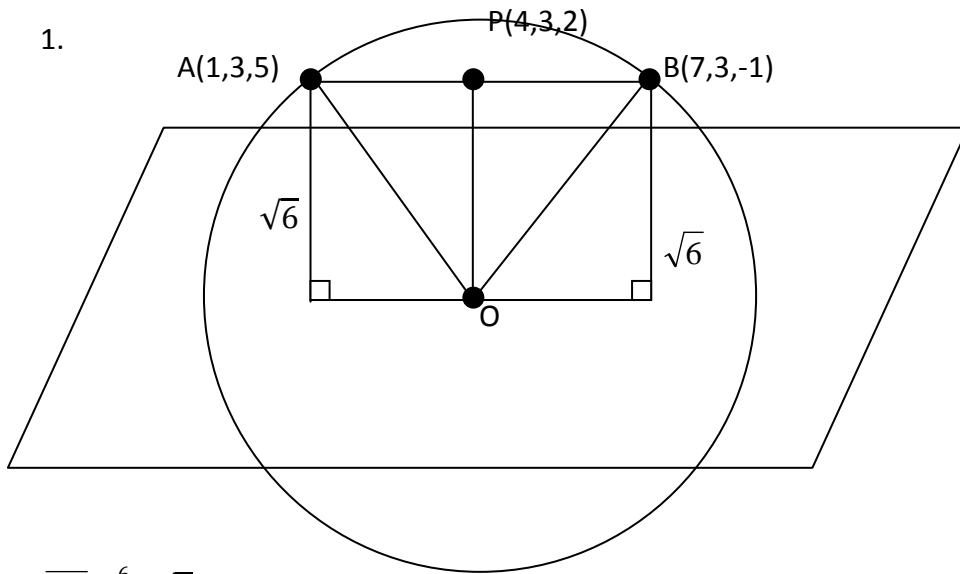


1.



$$\overline{AE} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

同理， $\overline{BE} = \sqrt{6}$ (畫圖可以看出，A、B 於平面 E 的同一側)

取 AB 中點 P， $\overrightarrow{OP} = (x-4, y-3, z-2) = (1, 2, 1)$ ，又 $\overline{OP} = \sqrt{6}$

可得知 $O(3, 1, 1)$ ，則 $r = \overline{AO} = 2\sqrt{6}$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 24 \quad \#$$

2. □□□□□

因為首位不能為 0，所以討論首位為 1, 2, 3, 4, ..., 9

$H(4, 11) - 4 \cdot H(4, 1) = 348$ (考慮其中一個為 10 以上)

$H(4, 10) - 4 = 282$ (考慮其中一個為 10 以上)

$H(4, 9) = 220$ (因為剩下的四位不可能超過 10 了)

..... $H(4, 3) = 20$

所以 $348 + 282 + 220 + 165 + 120 + 84 + 56 + 35 + 20 = 1330 \quad \#$

3. $f(x)$ 微分 得到 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ 所以 $x = 1, -1$

所以在 $x = -1$ 和 1 時 $f(x)$ 分別有最小和最大值

所以 $f(-1) \cdot f(1) < 0$ 即 $(-1+3-a)(1-3-a) < 0 \Rightarrow -2 < a < 2 \quad \#$

4. $\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \tan x = 1$

$$\frac{\log \cos x}{\log \sin x} + \frac{\log \sin x}{\log \cos x} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\log \cos x)^2 + (\log \sin x)^2}{(\log \sin x)(\log \cos x)} = 2$$

$$\Rightarrow (\log \cos x - \log \sin x)^2 = 0 \quad \text{i.e. } \log \cos x = \log \sin x$$

則 $\cos x = \sin x$ ，又 $\cos x, \sin x > 0$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \quad \#$$

5. $X=1$ 為其一根，使用長除法可得 $(x-1)(x^2+ax+(1-a))=0$

根與係數關係，令三根為 1, m, n，則 $1+m+n=1-a$ ， $mn=1-a$

所以 $1+m+n=mn \rightarrow (m-1)(n-1)=2$

討論 $m-1=1$ $n-1=2$ 或 $m-1=-1$ $n-1=-2$ ，可得 $m=2, n=3$ 或 $m=0, n=-1$

推得三根 1,2,3 時， $a=-5$

三根 -1,0,1 時， $a=1$

$$6. \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\tan 2\theta}{2\theta} = 2, \lim_{n \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{\tan 3\theta}{3\theta} = 3, \dots \text{以此類推}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} T_n = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\tan \theta} + \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan \theta}{\theta} + \frac{\tan 2\theta}{\theta}} + \dots = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots = \lim_{n \rightarrow 0} \sum_1^n \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2$$

$$7. \quad \Phi \quad \frac{\Pi}{2} - \frac{\Pi}{13} = \frac{11\Pi}{26}$$

$$\left(\frac{1 - \sin \theta + i \cos \theta}{1 - \sin \theta - i \cos \theta} \right) = \frac{(1 - \cos \Phi + i \sin \Phi)^2}{(1 - \cos \Phi - i \sin \Phi)(1 - \cos \Phi + i \sin \Phi)}$$

$$= \frac{-2 \cos \Phi + 2 \cos^2 + 2i \sin \Phi (1 - \cos \Phi)}{2(1 - \cos \Phi)} = -\cos \Phi + i \sin \Phi$$

$$\text{又 } \Phi = \frac{11\Pi}{26} \quad \therefore \left(\frac{1 - \sin \theta + i \cos \theta}{1 - \sin \theta - i \cos \theta} \right)^n (-\cos \Phi + i \sin \Phi)^n = \left(-\cos \frac{11\Pi}{26} + i \sin \frac{11\Pi}{26} \right)^n \text{ 為實數，故 } n=26 \quad \#$$

8.

畫出 $y = ||x| - 3|$ ，可知要 4 個交點，必須要在兩紅線內，且通過 (0, 3) 或 (3, 0) 代入 $x+3y+k=0$ ，可得

$$-9 < k < -3 \quad \#$$

