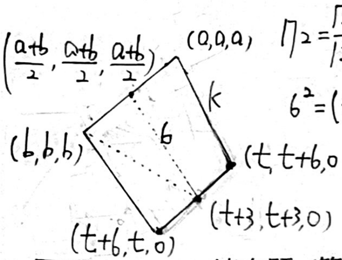
114 台南一中



$\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2}\right)$ (a,a,a) (b,b,b) $(t,t+6,0)$ $(t+3,t+3,0)$ $(t+6,t,0)$ k 6

$72=\frac{\sqrt2}{12}k^3=\frac{k^3}{6\sqrt2} \Rightarrow k=6\sqrt2,\ k^2=72=3(a-b)^2$

$6^2=\left(\frac{t}{3}+1\right)^2\times2+\left(\frac{2}{3}t+2\right)^2 = \frac{2}{3}t^2+4t+6$

$=(a-t)^2+(a-t-6)^2+a^2$

$=(b-t)^2+(b-t-6)^2+b^2$

$\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{4t+12}{3\cdot2}=\frac{2}{3}t+2$

$\Rightarrow t^2+6t-45=0 \Rightarrow t=-3+3\sqrt6$

$\begin{cases}a-b=2\sqrt6\\a+b=4\sqrt6\end{cases} \Rightarrow a=3\sqrt6$

$\int_\beta^\alpha a(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)\,dx$

$=a\left(\frac13(\alpha^3-\beta^3)-\frac12(\alpha+\beta)(\alpha^2-\beta^2)+\alpha\beta(\alpha-\beta)\right)$

$=\frac{a}{6}\left(2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-3(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+6\alpha\beta\right)$

$\Rightarrow A=\left|\frac{a}{6}(\alpha-\beta)^3\right|$

$\boxed{9}$ 法1

一、填充題（第 1~3 題，每題 5 分；第 4~8 題，每題 6 分；第 9~11 題，每題 7 分）

$\boxed{8}$ 先備

40

1.同時擲兩個大小不同的骰子一次，我們將出現點數和為 4 的事件稱為事件 A。今重複投擲上述兩個骰子 500 次，假設事件 A 恰發生 n 次的機率為 p_n，則滿足 $p_n<p_{n+1}$ 的正整數 n 之最大值為＿＿＿＿。

$\boxed{1}$ X Y: 1 3, 2 2, 3 1

$P=\frac{3}{6\times6}=\frac{1}{12}$

$C^{500}_n\left(\frac{1}{12}\right)^n\left(\frac{11}{12}\right)^{500-n}<C^{500}_{n+1}\left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}\left(\frac{11}{12}\right)^{499-n} \Rightarrow \frac{1}{500-n}\cdot\frac{11}{12}<\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{12} \Rightarrow 12n<489$

$\Rightarrow max=40$

$\boxed{2}$ $\frac{\sqrt{107}}{2}$ 兩兩相加

2.ΔABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-5$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-6$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-7$，求 ΔABC 面積＿＿＿＿。

$\sqrt{11}$ $\sqrt{13}$ $\sqrt{12}$ θ $\cos\theta=\frac{5}{2\sqrt{11}\sqrt{12}}$ $\sqrt{132}$ 5 $\sqrt{107}$ $\Rightarrow \Delta=\frac{\sqrt{107}}{2}$

460

3.袋中有 10 球，分別編 1~10 號，每球被取出的機會均等。遊戲規則如下：每次取一球，取後不放回，當「第 $k+1$ 次取出的號碼小於第 k 次取出的號碼」或「10 球全取完」時才停止。若此時取出的總球數為 m，則可得獎金 $(10\times m!)$ 元。求此遊戲玩一次得獎金的期望值＿＿＿＿元。

$1,2,\cdots 10 \Rightarrow \frac{1}{10!}\cdot10\cdot10!=10$

m 個 #m-1位 最大的

$\sum_{m=2}^{10}\left(C^{10}_m\cdot1\cdot C^{m-1}_1\times1\right)$（小→大，前 m-2 位） $\times\frac{1}{C^{10}_m\cdot m!}\cdot10\times m!=\frac{(1+9)\cdot9}{2}\cdot10$

剩下m-1個選一個放在#m位

$\Rightarrow 450+10=460$

$\boxed{3}$ 翰老師提供

$(1,7,3)$

4.已知 a、b、c 為正整數且 $a,b,c<10$，若 $ax^2-bx+3c=0$ 之兩根為 α、β，且 $1<\alpha<2$，$5<\beta<6$，求序組 (a,b,c)＝＿＿＿＿。

$\boxed{4}$ $6<\alpha+\beta<8$, $5<\alpha\beta<12$

$1<b=a(\alpha+\beta)<10 \Rightarrow a=1,\ b=7$

$3c=\alpha\beta\in\mathbb{N}$

$\begin{cases}\alpha+\beta=7\\\alpha\beta=6\end{cases}\Rightarrow \alpha^2-7\alpha+6=0 \Rightarrow \alpha=1$ or 6 不合

$\begin{cases}\alpha+\beta=7\\\alpha\beta=9\end{cases}\Rightarrow \alpha^2-7\alpha+9=0 \Rightarrow C=3$

$\Rightarrow \alpha=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$ (ok)

$t\ge\frac25$ or $t\le-2$

5.x、y 為任意實數，令 $t=\frac{x^2+y^2+1}{x+2y+2}$，求 t 的範圍＿＿＿＿。

$\boxed{5}$ $\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+(y-t)^2=\frac54t^2+2t-1\ge0 \Rightarrow 5t^2+8t-4\ge0$

$\begin{matrix}5 & -2\\1 & +4\end{matrix}$ $\Rightarrow t\ge\frac25$ or $t\le-4$

6.數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足：

(1) $a_1=500$

(2)對任意正整數 n，恆有 $(n+1)(n+2)a_{n+1}a_n-n(n+2)a_{n+1}-(n+1)^2a_n-(n+1)(n+4)=0$

求 $a_{998}=$＿＿＿＿。

$\frac{334}{333}$

$\boxed{6}$ $\begin{matrix}(n+2)a_{n+1} & -(n+1)\\(n+1)a_n & -n\end{matrix}$ $\begin{matrix}(n+1)(n+4)\\+(n+1)\cdot n\end{matrix}$

$\left((n+2)a_{n+1}-(n+1)\right)\left((n+1)a_n-n\right)=2(n+1)(n+2)$

$\Rightarrow \left(a_{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)\left(a_n-\frac{n}{n+1}\right)=2$，令 $b_n=a_n-\frac{n}{n+1}$

$b_2 b_1=2$, $b_1=500-\frac12$

$\Rightarrow b_{2k-1}=\frac{999}{2}$

$b_{2k}=\frac{4}{999}$

$=a_{998}-\frac{998}{999}$

Maomao 提供 $\Rightarrow a_{998}=\frac{334}{333}$

$-1<k<2$

7.平面上有一個三角形 ABC，同一平面上有一點 P 滿足 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{AB}$，若點 P 在 ΔABC 的內部，求實數 k 的範圍＿＿＿＿。

$\boxed{7}$ $\overrightarrow{AP}=\boxed{\frac{2-k}{6}}\overrightarrow{AB}+\frac36\overrightarrow{AC}$ $\begin{cases}0<\square+\Delta<1\\\square>0\\\Delta>0\end{cases}\Rightarrow -1<k<2$

Γ': $y=\frac{x^2+2ax}{4}$

$\frac{a^3}{27}$

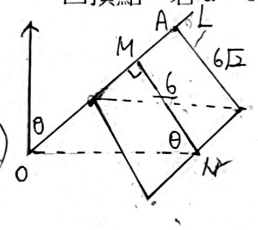
8.已知 $A=\begin{bmatrix}2&0\\a&1\end{bmatrix}$，其中 $a>0$，曲線 $\Gamma: y=x^2$ 經過 A 變換後可得曲線 Γ'，則曲線 Γ、Γ' 所圍成的封閉區域面積為＿＿＿＿。（以 a 表示）

$\boxed{8}$ $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\a&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac12\begin{bmatrix}1&0\\-a&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{x'}{2}\\\frac{-ax'+2y'}{2}\end{bmatrix}$

$3\sqrt6$

9.空間中 A(a,a,a)、B(b,b,b)兩點與 xy 平面上兩點 C、D 是某個體積為 72 的正四面體之四頂點，若 $a>b>0$，求 a 值＿＿＿＿。

$\boxed{9}$ 法2 (官方版)



A L M N O $6\sqrt2$ 6 θ

$\cos\theta=\frac{(1,1,1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt3}=\frac{1}{\sqrt3}$

$\sqrt3$ $\sqrt2$ θ 1

$\overline{OA}=6\sqrt2+3\sqrt2=\sqrt3a$

$\Rightarrow a=3\sqrt6$

2025.3.12(三)

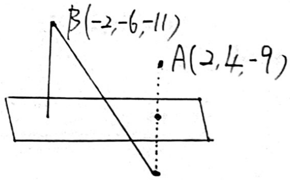
$\begin{cases}y=x^2\\y=\frac{x^2+2ax}{4}\end{cases}\Rightarrow x=0$ or $\frac{2a}{3}$

$A=\frac16\left(\frac23a\right)^3\left(1-\frac14\right)$

$=\frac{a^3}{27}$

$\boxed{10}$ 2025.3.13(四)高一府營

$\begin{cases} X=2x-2 \\ Y=2y-4 \\ Z=X+\frac{1}{2}Y \end{cases} \Rightarrow E: 2X-Y-2Z=0$



$V_A=(4-4+18)/(4+1+4)=2$

$x''=2-2\cdot2\cdot2$

$y''=4-2\cdot2\cdot(-1)$

$z''=-9-2\cdot2\cdot(-2)$

$\overline{BA''}=|(4,-14,-10)|$

$=2\sqrt{78}$

$2\sqrt{78}$

10. x、y 為任意實數，定義： $A''(-6,8,-1)$

$$f(x,y)=\sqrt{(2x-2)^2+(2y-4)^2+(2x-y+9)^2}+\sqrt{(2x+2)^2+(2y+6)^2+(2x-y+11)^2}$$

求 $f(x,y)$ 的最小值

$\boxed{11}$ 令 $z=x+iy$ $\quad x^2+(y-1)^2=k^2((x-1)^2+y^2)$

$\Rightarrow C: (k^2-1)(x^2+y^2)-2k^2x+2y+k^2-1=0 \Rightarrow$ 圓心 $\left(\frac{k^2}{k^2-1}, \frac{-1}{k^2-1}\right)$

11. z、w 為複數，

$\frac{17\sqrt{2}}{6}$

z 滿足：$\left|\frac{z-i}{z-1}\right|=k$，其中 $2\le k\le 5$

$r^2=\frac{k^4+1-(k^4-2k^2+1)}{(k^2-1)^2} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{2}k}{k^2-1}$ 令 $w=-3\sqrt{2}+ti\in L: x=-3\sqrt{2}$

w 滿足：$w+\overline{w}=-6\sqrt{2}$

$\frac{1+i}{\sqrt{2}}w=(-3\sqrt{2}+ti)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\left(-3-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+i\left(-3+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\in L': x+y+6=0$

求 $\left|z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}w\right|$ 的最小值

令 $P\in C$，$d(P,L')$ 的 min $=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 7-\frac{\sqrt{2}\times 2}{2^2-1}=\frac{17}{6}\sqrt{2}$ # $(d(O,L')-r)$

二、計算題 (須寫出過程方給分)

1. $0<\theta<2\pi$ 且 $\theta\ne\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$，求方程式 $\left|\log\left(\frac{|\sin 2\theta|}{2}\right)-2\log\left(|\cos\theta|\right)\right|=5-\tan\theta$ 的實根數。

(8 分)

2. a 為實數，實係數多項式 $f(x)$ 滿足：

$(x^2+x+1)f(x)=2x^{302}+x^{100}+x^{61}+a$

求：(1) a 值 (2 分)

(2) $f(x)$ 除以 (x^2-x+1) 的餘式 (5 分)

(3) $f(x)$ 除以 (x^2+x+1) 的餘式 (7 分)

3. ΔPQR 為正三角形，點 A、B、C 分別位於 $\overline{PQ}$ 、$\overline{QR}$ 、$\overline{RP}$ 上，且 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CA}=3$，求 ΔPQR 的最大可能面積。 (12 分)