TRML 團體賽-2024

1. 設$A=(0,-20)$、$B=(5,0)$為坐標平面上的兩點。若點C在拋物線$y=x^2$上移動，則ΔABC面積的最小值為 ______ 。

2. 若方程式$10^{2x}-10^{x+1}+k=0$恰有兩個相異正根的充分必要條件為$a<k<b$，則$b-a$之值為 ______ 。

3. 設L_1,L_2為坐標平面上的兩條平行直線。已知直線$x+2y=1$被L_1,L_2所截線段的長度為$2\sqrt{5}$，且直線$2x-y=1$被L_1,L_2所截線段的長度為4，則L_1,L_2兩直線的距離為 ______ 。(化為最簡根式)

4. 設m,n為滿足$\frac{2}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{12}$的正整數。若$100\le m\le 300$且$n$為**奇數**，則$m+n=$ ______ 。

5. 設三角形ABC的邊$\overline{AC}$上一點P滿足$\overline{BP}=10$且$\overline{CP}:\overline{PA}:\overline{AB}=1:2:3$，則三角形$ABC$面積的最大可能值為 ______ 。

6. 若把 3 個半徑為 3 的小球放在水平桌面上，兩兩相切，再將一個半徑為 3 的小球放在這三個球中間的上面且與前 3 球均相切，則上層小球最高點到桌面的距離為 ______ 。

7. 設有A、B兩個袋子，A袋中有 2 個球，B袋中有 3 個球。按如下規則進行操作：擲一個公正的骰子，若出現 1、2 點，則從A袋取 1 球放入B袋；若出現 3、4、5、6 點，則從B袋取 1 球放入A袋。這種操作反覆進行，直到有 1 袋沒有球時結束，或最多操作 4 次即終止操作。若操作在 4 次內 (含 4 次) 有一袋沒有球，則得 7 分；但若操作到第 4 次兩袋仍然都有球時，則依照A袋中球數的 5 倍得分，則得分的期望值為 ______ 。

8. 假設某一國家想在10個鄉鎮設置30個天然氣接收站，每個鄉鎮至少設置2個接收站。若要求位在不同鄉鎮的每兩個接收站之間都要有一條直通的天然氣管線，則此國家最少需要設置 ______ 條天然氣管線。

9. 設a,b均為正數，若函數$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$的值域為區間$[-1,5]$，則ab之值為 ______ 。

10. 若數列$\langle a_n\rangle$定義如下：$a_1=3$，且$a_n=\frac{a_{n-1}+3}{3a_{n-1}+1}$，則$a_{10}=$ ______ 。

TRML 團體賽-2024

題號	答案
1	40
2	16
3	$\frac{4\sqrt{5}}{3}$
4	135
5	90
6	$6+2\sqrt{6}$
7	$\frac{313}{27}$
8	360
9	$8\sqrt{5}$
10	$\frac{1023}{1025}$

※評分標準：每題 6 分，總分 60 分

2024 TRML 思考賽

思考賽共 10 題，每題均為 6 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。准考編號已由大會直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

設 S 是由某些正整數所組成的集合。我們以 $c(S)$ 表示集合 S 所含**相鄰數對** $(i,i+1)$ 的組數。例如：$S=\{1,2,3,4,6,7,9\}$ 中的相鄰數對共有以下 4 組：

$$(1,2),(2,3),(3,4),(6,7)，$$

此時，$c(S)=4$。

設 $X_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$，其中 n 為正整數。對非負整數 $k\le n$，我們令 $f_n(k)$ 表示在 X_n 的子集合中，滿足 $c(S)=k$ 的所有子集合 S 之個數。例如：集合 X_4 中滿足 $c(S)=1$ 的子集合 S 都恰有 1 組相鄰數對，此種子集合 S 共有以下 5 種：

$$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}，$$

故 $f_4(1)=5$；而滿足 $c(S)=2$ 的子集合 S 都恰有 2 組相鄰數對，此種子集合 S 共有 2 種：$\{1,2,3\}$，$\{2,3,4\}$，故 $f_4(2)=2$。

本試卷有兩個主要的評量目標：其一是求出 X_n 中有多少種的子集合 S 滿足相鄰數對的組數 $c(S)=k$，即求 $f_n(k)$ 的值；另一則是計算 X_n 中所有子集合或至少（恰）有 k 個元素的所有子集合 S 之 $c(S)$ 值的總和。例如：X_4 中恰含 2 個元素的子集合 S 共有 6 種：$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{3,4\}$，其 $c(S)$ 值分別為 $1,0,0,1,0,1$，此時，這些 $c(S)$ 值的總和為 $1+0+0+1+0+1=3$。又如：X_4 中滿足 $c(S)>0$ 的子集合 S 共有以下 8 種：

$$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}，$$

其 $c(S)$ 值分別為 $1,1,1,1,1,2,2,3$，因此，X_4 的所有子集合 S 之 $c(S)$ 值的總和為 $1+1+1+1+1+2+2+3=12$。

請依序回答下列問題。

(1) 試求集合 $S=\{1,3,4,5,6,8,9,10,12,13\}$ 的 $c(S)$ 值，並列出 S 的所有相鄰數對。

(2) 試求 $f_5(1)$ 的值，請說明理由或列出 X_5 的子集合中滿足 $c(S)=1$ 的所有子集合 S。

(3) 試求 $f_6(2)$ 的值，請說明理由或列出 X_6 的子集合中滿足 $c(S)=2$ 的所有子集合 S。

(4) 試求 $f_7(3)$ 的值，請說明理由或列出 X_7 的子集合中滿足 $c(S)=3$ 的所有子集合 S。

(5) 試求 $f_{12}(0)$ 的值，並請說明理由。

(6) 對任意正整數 n，試求 $f_n(1)$ 的值，並請說明理由，並依所得結果求 $f_{10}(1)$ 之值。

(7) 對 X_5 的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。

(8) 設正整數 $n\ge 2$。對 X_n 的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。

(9) 對 X_9 中**至少 4 個元素**的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。

(10) 設正整數 $n\ge k\ge 2$。對 X_n 中**恰有 k 個元素**的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。

2024 TRML 思考賽參考解答及評分建議

(1) 試求集合 $S=\{1,3,4,5,6,8,9,10,12,13\}$ 的 $c(S)$ 值，並列出 S 的所有相鄰數對。

【參考解答】集合 $S=\{1,3,4,5,6,8,9,10,12,13\}$ 中的相鄰數對共有 6 組：

$$(3,4),(4,5),(5,6),(8,9),(9,10),(12,13)\text{，}$$

故 S 的相鄰數對組數 $c(S)=6$。

評分建議：答案正確得 2 分，說明完整再得 4 分（僅寫出 3~5 組得 2 分）。

(2) 試求 $f_5(1)$ 的值，請說明理由或列出 X_5 的子集合中滿足 $c(S)=1$ 的所有子集合 S。

【參考解答】 $f_5(1)=10$。

【解一】這是因為滿足 $c(S)=1$ 的子集合 S 有以下 10 種：

$$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},$$
$$\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,5\}.$$

評分建議：答案正確得 2 分，說明完整再得 4 分（僅寫出 5~9 組得 2 分）

【解二】 $f_5(1)=C_1^4+C_2^3\times 2!=10$。

【說明】 X_n 的每一子集合 S 可以對應一個長度為 n 的 0-1 字串 $s=a_1a_2\cdots a_n$，其中當 $k\in S$ 時 $a_k=1$、$k\notin S$ 時 $a_k=0$，$k=1,2,3,\cdots,n$。

若 $|S|=n-k$，則 S 對應的 0-1 字串中恰有 $n-k$ 個 1 及 k 個 0。例如，X_5 中的 $S=\{1,2,5\}$ 對應到 $s=11001$。本題及後續多題都可以此種字串來思考解題。

① s 中有 3 個 0 及 2 個相連的 1。從 3 個 0 隔開的 4 個位置選出 1 個位置放入這 2 個 1。 $\boxed{11}$ √○√○√○√ 有 $C_1^4=4$ 種 s。

② s 中有 2 個 0 及 2 個相連的 1 和 1 個不連的 1。從 2 個 0 隔開的 3 個位置選出 2 個位置放入這 3 個 1。 $\boxed{11}$ $\boxed{1}$ √○√○√ 有 $C_2^3\times 2!=6$ 種 s。

評分建議：答案正確得 2 分，列式正確得 4 分。

(3) 試求 $f_6(2)$ 的值，請說明理由或列出 X_6 的子集合中滿足 $c(S)=2$ 的所有子集合 S。

【參考解答】 $f_6(2)=13$。

【解一】這是因為滿足 $c(S)=2$ 的子集合 S 有以下 13 種：

$$\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\},\{4,5,6\},$$
$$\{1,2,3,5\},\{1,2,3,6\},\{2,3,4,6\},\{1,3,4,5\},\{1,4,5,6\},\{2,4,5,6\},$$
$$\{1,2,4,5\},\{1,2,5,6\},\{2,3,5,6\}.$$

評分建議：答案正確得 2 分，說明完整再得 4 分（僅寫出 7~12 組得 2 分）

【解二】 $f_6(2)=C_1^4+C_2^3\times 2!+C_2^3=13$。

① s 中有 3 個 0 及 3 個相連的 1。從 3 個 0 隔開的 4 個位置選出 1 個位置放入這 3 個 1。 $\boxed{111}$ √○√○√○√ 有 $C_1^4=4$ 種 s。

② s 中有 2 個 0 及 3 個相連的 1 和 1 個不連的 1。從 2 個 0 隔開的 3 個位置選出 2 個位置放入這 4 個 1。 $\boxed{111}$ $\boxed{1}$ √○√○√ 有 $C_2^3\times 2!=6$ 種 s。

③ s 中有 2 個 0 及兩組隔開的 2 個相連的 1。從 2 個 0 隔開的 3 個位置選出 2 個位置放入這 4 個 1。 $\boxed{11}$ $\boxed{11}$ √○√○√ 有 $C_2^3=3$ 種 s。

評分建議：答案正確得 2 分，列式正確得 4 分。

2024 TRML 思考賽

思考賽共 10 題，每題均為 6 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。准考編號已由大會直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

設 S 是由某些正整數所組成的集合。我們以 $c(S)$ 表示集合 S 所含**相鄰數對** $(i,i+1)$ 的組數。例如：$S=\{1,2,3,4,6,7,9\}$ 中的相鄰數對共有以下 4 組：

$$(1,2),(2,3),(3,4),(6,7)\text{，}$$

此時，$c(S)=4$。

設 $X_n=\{1,2,3,\dots,n\}$，其中 n 為正整數。對非負整數 $k\le n$，我們令 $f_n(k)$ 表示在 X_n 的子集合中，滿足 $c(S)=k$ 的所有子集合 S 之個數。例如：集合 X_4 中滿足 $c(S)=1$ 的子集合 S 都恰有 1 組相鄰數對，此種子集合 S 共有以下 5 種：

$$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}\text{，}$$

故 $f_4(1)=5$；而滿足 $c(S)=2$ 的子集合 S 都恰有 2 組相鄰數對，此種子集合 S 共有 2 種：$\{1,2,3\}$，$\{2,3,4\}$，故 $f_4(2)=2$。

本試卷有兩個主要的評量目標：其一是求出 X_n 中有多少種的子集合 S 滿足相鄰數對的組數 $c(S)=k$，即求 $f_n(k)$ 的值；另一則是計算 X_n 中所有子集合或至少（恰）有 k 個元素的所有子集合 S 之 $c(S)$ 值的總和。例如：X_4 中恰含 2 個元素的子集合 S 共有 6 種：$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{3,4\}$，其 $c(S)$ 值分別為 $1,0,0,1,0,1$，此時，這些 $c(S)$ 值的總和為 $1+0+0+1+0+1=3$。又如：X_4 中滿足 $c(S)>0$ 的子集合 S 共有以下 8 種：

$$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\text{，}$$

其 $c(S)$ 值分別為 $1,1,1,1,1,2,2,3$，因此，X_4 的所有子集合 S 之 $c(S)$ 值的總和為 $1+1+1+1+1+2+2+3=12$。

請依序回答下列問題。

(1) 試求集合 $S=\{1,3,4,5,6,8,9,10,12,13\}$ 的 $c(S)$ 值，並列出 S 的所有相鄰數對。

(2) 試求 $f_5(1)$ 的值，請說明理由或列出 X_5 的子集合中滿足 $c(S)=1$ 的所有子集合 S。

(3) 試求 $f_6(2)$ 的值，請說明理由或列出 X_6 的子集合中滿足 $c(S)=2$ 的所有子集合 S。

(4) 試求 $f_7(3)$ 的值，請說明理由或列出 X_7 的子集合中滿足 $c(S)=3$ 的所有子集合 S。

(5) 試求 $f_{12}(0)$ 的值，並請說明理由。

(6) 對任意正整數 n，試求 $f_n(1)$ 的值，並請說明理由，並依所得結果求 $f_{10}(1)$ 之值。

(7) 對 X_5 的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。

(8) 設正整數 $n\ge 2$。對 X_n 的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。

(9) 對 X_9 中**至少 4 個元素**的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。

(10) 設正整數 $n\ge k\ge 2$。對 X_n 中**恰有 k 個元素**的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。

(4) 試求 $f_7(3)$ 的值，請說明理由或列出 X_7 的子集合中滿足 $c(S)=3$ 的所有子集合 S 。

【參考解答】 $f_7(3)=16$ 。

【解一】這是因為滿足 $c(S)=3$ 的子集合 S 有以下 3 類情形，分別計算其集合個數如下。

第 1 類： S 中有 1 組 4 連續數，此種子集合有 10 種：

$$\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,7\},$$
$$\{2,3,4,5\},\{2,3,4,5,7\},$$
$$\{3,4,5,6\},\{1,3,4,5,6\},$$
$$\{4,5,6,7\},\{1,4,5,6,7\},\{2,4,5,6,7\}.$$

第 2 類： S 中有 1 組 3 連續數及 1 組 2 連續數，此種子集合有 6 種：

$$\{1,2,3,5,6\},\{1,2,3,6,7\},\{2,3,4,6,7\},$$
$$\{1,2,4,5,6\},\{1,2,5,6,7\},\{2,3,5,6,7\}.$$

第 3 類： S 中有 3 組分隔的 2 連續數，此種子集合有 0 種。

合計 $10+6+0=16$ 種。

評分建議：答案正確得 2 分，說明完整再得 4 分（僅寫出 8~15 組得 2 分）。

【解二】 $f_7(3)=C_1^4+C_2^3\times 2!+C_2^3\times 2!=16$ 。

【說明】

① s 中有 3 個 0 及 4 個相連的 1。從 3 個 0 隔開的 4 個位置選出 1 個位置放入這 4 個 1。 $\boxed{1111}$ √○√○√○√ 有 $C_1^4=4$ 種 s 。

② s 中有 2 個 0 及 4 個相連的 1 和 1 個不連的 1。從 2 個 0 隔開的 3 個位置選出 2 個位置放入這 5 個 1。 $\boxed{1111}$ $\boxed{1}$ √○√○√ 有 $C_2^3\times 2!=6$ 種 s 。

③ s 中有 2 個 0 及 3 個相連的隔開 2 個相連的 1。從 2 個 0 隔開的 3 個位置選出 2 個位置放入這 5 個 1。 $\boxed{111}$ $\boxed{11}$ √○√○√ 有 $C_2^3\times 2!=6$ 種 s 。

評分建議：答案正確得 2 分，列式正確得 4 分。

(5) 試求 $f_{12}(0)$ 的值，並請說明理由。

【參考解答】377。

【解一】對正整數 n，令 a_n 表示 $X_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$ 中滿足 $c(S)=0$ 的子集合 S 之個數。顯然，$a_1=2, a_2=3$ 。對 $n\geq 3$，滿足 $c(S)=0$ 的子集 S 可分成 2 類：

第 1 類：$1\in S$ ，此時，$2\notin S$。故此種子集合 S 相當於在 $\{3,4,5,\ldots,n\}$ 中，找滿足 $c(S)=0$ 的子集合 S ，其個數有 a_{n-2} 種。

第 2 類：$1\notin S$ ，此種子集合 S 相當於在 $\{2,3,4,\ldots,n\}$ 中，找滿足 $c(S)=0$ 的子集合 S ，其個數有 a_{n-1} 種。

因此，a_n 滿足二階遞迴式：$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$（費氏數列），其中 $n\geq 3$。由 $a_0=1$，$a_1=2$，我們可逐項遞推得到 a_n 的值：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

or 376

因此，所求 $a_{12}=377$ 。 **【註】**： $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2}-\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}$ 。

評分建議：答案正確得 ~~3~~ 2 分，說明完整再得 ~~3~~ 4 分（直接寫出遞迴式得 2 分）。

【解二】$f_{12}(0)=1+C_1^{12}+C_2^{11}+C_3^{10}+C_4^9+C_5^8+C_6^7=377$。

【說明】

① s 中有 12 個 0，沒有 1。 有 $C_0^{12}=1$ 種 s。

② s 中有 11 個 0 及 1 個 1。從 11 個 0 隔開的 12 個位置選出 1 個位置放入這 1 個 1。 $\boxed{1}$ $^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\cdots^{\surd}\bigcirc^{\surd}$ 有 $C_1^{12}=12$ 種 s。

③ s 中有 10 個 0 及 2 個不連的 1。從 10 個 0 隔開的 11 個位置選出 2 個位置放入這 2 個 1。 $\boxed{1}\ \boxed{1}$ $^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\cdots^{\surd}\bigcirc^{\surd}$ 有 $C_2^{11}=55$ 種 s。

④ s 中有 9 個 0 及 3 個不連的 1。從 9 個 0 隔開的 10 個位置選出 3 個位置放入這 3 個 1。 $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$ $^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\cdots\cdots^{\surd}\bigcirc^{\surd}$ 有 $C_3^{10}=120$ 種 s

⋮ ⋮

⑤ s 中有 6 個 0 及 6 個不連的 1。從 6 個 0 隔開的 7 個位置選出 6 個位置放入這 6 個 1。 $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$ $^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}$ 有 $C_6^7=7$ 種 s。

評分建議：答案正確得 2 分，列式正確得 4 分。

(6) 對任意正整數 n，試求 $f_n(1)$ 的值，並請說明理由，並依所得結果求 $f_{10}(1)$ 之值。

【參考解答】$f_{10}(1)=235$。

【解一】首先，將每一子集合 S 對應一個長度為 n 的 0-1 字串 $s=a_1a_2\cdots a_n$，其中

$$a_k=\begin{cases}1,\text{當 } k\in S\\0,\text{當 } k\notin S\end{cases}\text{，}k=1,2,3,\cdots,n\text{。}$$

若 $|S|=n-k$，則 S 對應的 0-1 字串 $s=a_1a_2\cdots a_n$ 中恰有 $n-k$ 個 1 及 k 個 0。當 $f_n(S)=1$ 時，$0\le k\le n-2$，我們可以在 k 個 0 隔開的 $k+1$ 個空隙中插入 $n-k$ 個 1，其中恰有 2 個 1 併在同一個空隙，其餘 $n-k-2$ 個 1 各自插入其他 k 個空隙中，計有 $C_1^{k+1}\cdot C_{n-k-2}^k$ 種插入的方法數。因此，所求子集合有

$$\sum_{k=0}^{n-2}C_1^{k+1}\cdot C_{n-k-2}^k=\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)C_{n-k-2}^k\text{ 種，}$$

亦可寫成 $\displaystyle\sum_{k=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1}^{n-2}(k+1)C_{n-k-2}^k$ 或 $\displaystyle\sum_{k=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}^{n-1}(n-k)C_{n-k}^k$。 **(見一般性定理)**

再利用 $n=10$ 求 $f_{10}(1)$ 得

$$\text{求}\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)C_{n-k-2}^k=\sum_{k=0}^{8}(k+1)C_{8-k}^k=5\cdot C_4^4+6\cdot C_3^5+7\cdot C_2^6+8\cdot C_1^7+9\cdot C_0^8$$

$$=5+60+105+56+9=235$$

評分建議：答案正確得 3 分，說明完整再得 3 分。

【解二】$f_n(1)=C_1^{n-1}+C_2^{n-2}\times 2!+C_3^{n-3}\times\dfrac{3!}{2!}+\cdots+C_n^{n-n}\times\dfrac{n!}{(n-1)!}$。

【說明】

① s 中有 $n-2$ 個 0 及 2 個相連的 1。從 $n-2$ 個 0 隔開的 $n-1$ 個位置選出 1 個位置放入這 2 個 1。 $\boxed{11}$ $^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\cdots^{\surd}\bigcirc^{\surd}$ 有 C_1^{n-1} 種 s。

② s 中有 $n-3$ 個 0 及 2 個相連的 1 和 1 個不連的 1。從 $n-3$ 個 0 隔開的 $n-2$ 個位置選出 3 個位置 $\boxed{11}\ \boxed{1}$ $^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\cdots^{\surd}\bigcirc^{\surd}$ 有 $C_2^{n-2}\times 2!$ 種 s。

放入這 3 個 1。

③ s 中有 $n-4$ 個 0 及 2 個相連的 1 和 2 個不連的 1。從 $n-4$ 個 0 隔開的 $n-3$ 個位置選出 3 個位置放入這 4 個 1。

$\boxed{11}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$

$^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\bigcirc^{\surd}\cdots^{\surd}\bigcirc^{\surd}$

有 $C_3^{n-3}\times\dfrac{3!}{2!}$ 種 s。

⋮

再利用 $n=10$ 求 $f_{10}(1)$，

得 $f_{10}(1)=C_1^9+C_2^8\times 2!+C_3^7\times\dfrac{3!}{2!}+C_4^6\times\dfrac{4!}{3!}+C_5^5\times\dfrac{5!}{4!}=9+56+105+60+5=235$。

評分建議：答案正確得 3 分，說明完整再得 3 分。

【一般性定理】

集合 $X_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$ 中，滿足 $c(S)=m$ 的**非空**子集合 S 有 $\displaystyle\sum_{k=\left\lceil\frac{n-m+1}{2}\right\rceil}^{n-1}C_m^{n-k}C_{n-k-m+1}^{k}$ 種。

【參考解答】將每一個非空子集合 S 對應一個長度為 n 的 0-1 字串 $s=a_1a_2\cdots a_n$。

若 $|S|=n-k$，則 S 對應的 0-1 字串 $s=a_1a_2\cdots a_n$ 中恰有 $n-k$ 個 1 及 k 個 0。當 $c(S)=m$ 時，我們可以在 k 個 0 隔開的 $k+1$ 個空隙中選出 $n-k-m$ 個空隙，將 $n-k$ 個 1 插入這些空隙，每個空隙至少要有一個 1；其方法數相當於 $x_1+x_2+\ldots+x_{n-k-m}=n-k$ 的正整數解之個數，此有 C_m^{n-k-1} 種方法。因此，滿足 $c(S)=m$ 的非空子集合 S 共有

$$\sum_{k=0}^{n-2}C_m^{n-k-1}C_{n-k-m}^{k+1}=\sum_{k=\left\lceil\frac{n-m-1}{2}\right\rceil}^{n-m-1}C_m^{n-k-1}C_{n-k-m}^{k+1}\text{ 種，也可以寫成 }\sum_{k=\left\lceil\frac{n-m+1}{2}\right\rceil}^{n-m}C_m^{n-k}C_{n-k-m+1}^{k}\text{。}$$

特例：當 $m=0$ 時，滿足 $c(S)=0$ 的子集合 S 有 $1+\displaystyle\sum_{k=\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil}^{n}C_{n-k+1}^{k}$ 種；

當 $m=1$ 時，滿足 $c(S)=1$ 的子集合 S 有 $\displaystyle\sum_{k=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}^{n-1}(n-k)C_{n-k}^{k}$ 種；

當 $m=2$ 時，滿足 $c(S)=2$ 的子集合 S 有 $\displaystyle\sum_{k=\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil}^{n-2}C_2^{n-k}C_{n-k-1}^{k}$ 種。

(7) 對 X_5 的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。

【解一】可以忽略 $c(S)=0$ 的子集合 S，對於 $c(S)\geq 1$ 的 S，其元素個數 $|S|\geq 2$，計算其 $c(S)$ 值如下。

(i) 恰含 2 個元素的子集合 S，有 4 種：$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\}$，每個 $c(S)=1$。此類的 $c(S)$ 值之和為 $1\times 4=4$。

(ii) 恰含 3 個元素的子集合 S，分成以下兩子類：
第 1 子類：$\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\}$，每個 $c(S)=2$；
第 2 子類：$\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,5\}$，每個 $c(S)=1$。
此類的 $c(S)$ 值之和為 $2\times 3+1\times 6=12$。

(iii) 恰含 4 個元素的子集合 S，分成以下兩子類：
第 1 子類：$\{1,2,3,4\},\{2,3,4,5\}$，每個 $c(S)=3$；

第 2 子類：$\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\}$，每個 $c(S)=2$。
此類的 $c(S)$ 值之和為 $3\times2+2\times3=12$。

(iv) 恰含 5 個元素的子集合 S，只有 1 個：$\{1,2,3,4,5\}$，其 $c(S)$ 值為 4。

因此，所求 $c(S)$ 值的總和 $\sum\limits_{S\subseteq X_5} c(S)=4+12+12+4=32$。

【解二】含$\{1,2\}$的子集合有 $2^3=8$ 種；同理，含$\{2,3\}$、$\{3,4\}$、$\{4,5\}$的子集合也各有 8 個，所以$c(S)$總和共$8\times4=32$。

評分建議：答案正確得 3 分，說明完整再得 3 分。

(8) 設正整數 $n\geq2$。對 X_n 的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。

【參考解答】對任意正整數 $n\geq2$，在計算 $c(S)$ 值的總和時，可先對每一組數對 $(i,i+1)$，計算含此數對的子集合 S 之個數。除了 $i,i+1$ 之外，其他的 $n-2$ 個數都可在 S 中或不在 S 中，故含數對 $(i,i+1)$ 的子集合 S 恰有 2^{n-2} 種。又整數數對 $(i,i+1)$ 有以下 $n-1$ 種可能的情況：$(1,2),(2,3),(3,4),\cdots,(n-1,n)$，因此，所求 $c(S)$ 的總和 $(n-1)2^{n-2}$。

【另解】參見第 10 題的解法，將各個 k 的答案加起來。

評分建議：答案正確得 3 分，說明完整再得 3 分。

(9) 對 X_9 中至少 4 個元素的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。

【解一】當 $|S|\leq1$ 時，每個 $c(S)=0$。當 $|S|=2$ 時，$c(S)=0$ 或 1，其中滿足 $c(S)=1$ 的子集合 S 有 8 種：$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\},\{6,7\},\{7,8\},\{8,9\}$。

當 $|S|=3$ 時，分成以下兩類。

(i) S 中恰有 1 組相鄰數對(即 $c(S)=1$)，計有以下 42 種：
含數對 $(1,2)$ 或 $(8,9)$ 的子集合各有 6 種，
含數對 $(2,3)$ 或 $(7,8)$ 的子集合各有 5 種，
含數對 $(3,4)$ 或 $(6,7)$ 的子集合各有 5 種，
含數對 $(4,5)$ 或 $(5,6)$ 的子集合各有 5 種。
合計有 $2(6\times1+5\times3)=42$ 種子集合 S，每個 $c(S)=1$。

(ii) S 中恰有 2 組相鄰數對(即 $c(S)=2$)，計有以下 7 種：
$\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\},\{4,5,6\},\{5,6,7\},\{6,7,8\},\{7,8,9\}$

以上兩類的 $c(S)$ 值之和為 $42\times1+7\times2=56$。
因此，由第 (8) 題的結果，可得所求 $c(S)$ 的總和為
$(9-1)2^{9-2}-8-56=1024-8-56=960$

【解二】含$\{1,2\}$且至少有 4 個元素的子集合有 $2^7-C_0^7-C_1^7=120$ 種；同理，含$\{2,3\}$、$\{3,4\}$、…、$\{8,9\}$且至少有 4 個元素的子集合各有 120 個，故$c(S)$總和共$120\times8=960$。

【解三】參見第 10 題的解法。

評分建議：答案正確得 3 分，說明完整再得 3 分。

(10) 設正整數 $n\geq k\geq2$。對 X_n 中**恰有 k 個元素**的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。

【參考解答】令 $|S|=k$。若 S 中包含某一數對 $(i,i+1)$，其中 $i=1,2,3,\cdots,n-1$，因為 S 中除了 $i,i+1$ 這二數外，還要從其餘的 $n-2$ 個數選取 $k-2$ 個數，故此種 S 恰有 C_{k-2}^{n-2} 種。在計算 $c(S)$ 時，數對 $(i,i+1)$ 會被算了一次權數，如果 S 中還有其他的相鄰數對，其連續的整數也會加權計在 $c(S)$ 中。例如：$S=\{1,2,4,6,7,9\}$，在考慮數對 $(1,2)$ 時，算了一次權數，而在考慮數對 $(6,7)$ 時，也一樣算了一次權數，故 $c(S)=2$。又 i 可以是 $1,2,3,\cdots,n-1$ 中的任一數，故所求 $c(S)$ 的總和為 $(n-1)C_{k-2}^{n-2}$。

【另解】對 $i=1,2,3,\cdots,n-1$，我們定義函數 $P_i(S)=\begin{cases}1, & 若\ i,i+1\in S\\ 0, & 其他\end{cases}$，則可推得：$c(S)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}P_i(S)$，且對每一個 $i=1,2,3,\cdots,n-1$，因為 S 中除了 $i,i+1$ 這二數外，還要從其餘的 $n-2$ 個數選取 $k-2$ 個數，故 $\sum\limits_{|S|=k}P_i(S)=C_{k-2}^{n-2}$。因此，

$$\sum_{|S|=k}c(S)=\sum_{|S|=k}\sum_{i=1}^{n-1}P_i(S)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{|S|=k}P_i(S)=\sum_{i=1}^{n-1}C_{k-2}^{n-2}=(n-1)C_{k-2}^{n-2}。$$

評分建議：答案正確得 3 分，說明完整再得 3 分。

【註】第 (8) 題及第 (9) 題的一般式也可直接由第 (10) 題的結果推導如下：

$$\sum_{S\subseteq X_n}c(S)=\sum_{k=2}^{n}\sum_{|S|=k}c(S)=\sum_{k=2}^{n}(n-1)C_{k-2}^{n-2}=(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}C_k^{n-2}=(n-1)2^{n-2}\ ;$$

$$\sum_{\substack{S\subseteq X_n\\|S|\geq 4}}c(S)=\sum_{k=4}^{n}(n-1)C_{k-2}^{n-2}=(n-1)(C_2^{n-2}+C_3^{n-2}+\cdots+C_{n-2}^{n-2})=(n-1)(2^{n-2}-n+1)。$$

TRML 個人賽-2024 第一回

I-1. 設 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 為三次實係數多項式。若 $y=f(x)$ 的圖形通過點 $A(0,6)$，且其對稱中心為 $(-1,6)$，則 $b+c+d=$ ______ 。

I-2. 已知 $90°<x<180°$。若 $\tan x=-2\sqrt{2}$，則 $\cos\frac{x}{2}=$ ______ 。

I-3. 設 $\{a_n\}$ 為遞增數列，並記 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$。若對所有的正整數 n，$2\sqrt{S_n}=a_n+1$ 都成立，則 $a_{113}=$ ______ 。

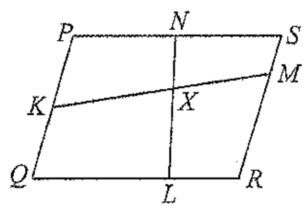
TRML 個人賽第一回-2024

題號	答案
I-1	11
I-2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{1}{\sqrt{3}}$
I-3	225

I-4. 設 a,b 為正整數，$1 \le a \le 9$，$1 \le b \le 9$。若 $13(66a+b)$ 為一完全平方數，則數對

$(a,b)=$ ______ 。

I-5. 如圖，平行四邊形 $PQRS$ 中，K、L、M、N 在其四邊上，K、N 分別為 $\overline{PQ}$、$\overline{PS}$ 的中點，$\overline{QL}=\frac{2}{3}\overline{QR}$，$\overline{SM}=\frac{1}{4}\overline{RS}$。若 X 為 $\overline{KM}$ 與 $\overline{LN}$ 的交點，且 $\overrightarrow{PX}=a\overrightarrow{PQ}+b\overrightarrow{PS}$，則 $a+b=$ ______ 。



I-6. 考慮 $1,2,3,4,5$ 所有可能的排列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，其中滿足：$a_1<a_2$，$a_2>a_3$，$a_3<a_4$，$a_4>a_5$ 的排列共有 _____ 種。

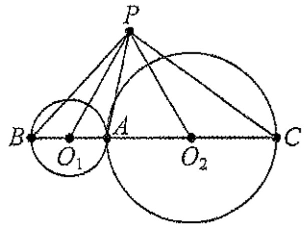
TRML 個人賽第二回-2024

題號	答案
I-4	(7,6)
I-5	$\frac{23}{25}$ (0.92)
I-6	16

TRML 個人賽-2024 第三回

I-7. 若x,y為滿足$x^2+y^2\le 1$的實數，則$\left|7x^2-48xy-7y^2\right|$的最大值為 ______ 。

I-8. 如圖，圓O_1與圓O_2外切於點A，且$\overline{AB}=8$、$\overline{AC}=18$分別為圓O_1、圓O_2的直徑。若P為兩圓外部一點，滿足$\overline{PA}=8$，$\overline{PO_1}=\overline{PO_2}=10$，則$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=$ ______ 。



I-9. 某n項的等比數列，包含$1,4,32,128$，其首項為1、末項為128。若$n\le 160$，則n的所有可能值之和為 _____ 。

TRML 個人賽第三回-2024

題號	答案
I-7	25
I-8	466
I-9	1793

TRML 個人賽-2024 第四回

I-10. 設 C 爲坐標平面上以原點 O 爲圓心，$\sqrt{10}$ 爲半徑的圓。若從點 $P\left(\frac{6}{5},\frac{18}{5}\right)$ 作圓 C 的兩條切線，且二切點爲 Q，R。則 $\cos\angle QPR$ 之值為 ______ 。

I-11. 方程式 $3x^2+x-x\sqrt{3x^2-1}-2=0$ 最大的解為 ______ 。

I-12. 反覆擲一公正骰子，直到有一種點數出現 3 次爲止，並以從開始到結束爲止所有擲出的點數之和作爲得分 (重複出現的點數要累計)，則得分恰為 10 分的機率為 ______ 。

TRML 個人賽第四回-2024

題號	答案
I-10	$-\frac{7}{18}$
I-11	$\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $\sqrt{\frac{2}{3}}$
I-12	$\frac{77}{7776}$ 或 $\frac{77}{6^5}$

TRML 接力賽-2024 第一回

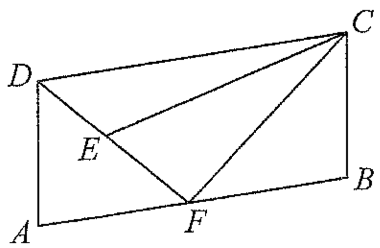
R1-1. 已知 n 為正整數，且 6^n 可以整除 $12^5\times135$，則 n 的最大可能值為 ______ 。

TRML 接力賽-2024 第一回

R1-2. 設 T 為前面傳來的答案。若圓 $(x-T)^2+(y+1)^2=a$ (其中 a 為正整數)，與直線 $3x+4y=0$ 不相交，則 a 的最大可能值為 ______ 。

TRML 接力賽-2024 第一回

R1-3. 設 T 為前面傳來的答案。如圖，$ABCD$ 為平行四邊形，E 為其內部一點，滿足 $\overline{CE}=T,\overline{DF}=12$，且 $\sin\angle CEF=\dfrac{3}{4}$，則 $ABCD$ 的面積為 ______ 。



TRML 接力賽第一回-2024

題號	答案
R1-1	8
R1-2	15
R1-3	135

TRML 接力賽-2024 第二回

R2-1. 若實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $(x^2+1)f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式為 $x+13$，則 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 ______ 。

TRML 接力賽-2024 第二回

R2-2. 設 T 為前面傳來的答案。已知矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & a \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$，其中 $a<0$，則 $a-b$ 之值為 ______ 。

TRML 接力賽-2024 第二回

R2-3. 設 T 為前面傳來的答案。已知 T 為正整數，且 $\log(2^{4T}+4^{2T+1}) = p\log 2+q$，其中 p,q 都是正整數，則 $p+q$ 之值為 ______ 。

TRML 接力賽第二回-2024

題號	答案
R2-1	6
R2-2	28
R2-3	112