國立臺南第一高級中學114學年度第一次教師甄選數學科試題

一、填充題 (第 1~3 題，每題 5 分；第 4~8 題，每題 6 分；第 9~11 題，每題 7 分)

1.同時擲兩個大小不同的骰子一次，我們將出現點數和為 4 的事件稱為事件 A。今重複投擲上述兩個骰子 500 次，假設事件 A 恰發生 n 次的機率為 p_n，則滿足 $p_n < p_{n+1}$ 的正整數 n 之最大值為_______。

2.ΔABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-5$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-6$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-7$，求 ΔABC 面積_______。

3.袋中有 10 球，分別編 1~10 號，每球被取出的機會均等。遊戲規則如下：每次取一球，取後不放回，當「第 $k+1$ 次取出的號碼小於第 k 次取出的號碼」或「10 球全取完」時才停止。若此時取出的總球數為 m，則可得獎金 $(10\times m!)$ 元。求此遊戲玩一次得獎金的期望值_______元。

4.已知 a、b、c 為正整數且 $a, b, c<10$，若 $ax^2-bx+3c=0$ 之兩根為 α、β，且 $1<\alpha<2$，$5<\beta<6$，求序組$(a, b, c)=$_______。

5. x、y 為任意實數，令 $t=\dfrac{x^2+y^2+1}{x+2y+2}$，求 t 的範圍_______。

6.數列$\langle a_n\rangle$滿足：

(1) $a_1=500$

(2)對任意正整數 n，恆有 $(n+1)(n+2)a_{n+1}a_n-n(n+2)a_{n+1}-(n+1)^2a_n-(n+1)(n+4)=0$

求 $a_{998}=$_______。

7.平面上有一個三角形 ABC，同一平面上有一點 P 滿足 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{AB}$，若點 P 在 ΔABC 的內部，求實數 k 的範圍_______。

8.已知 A=$\begin{bmatrix}2 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}$，其中 $a>0$，曲線 $\Gamma: y=x^2$ 經過 A 變換後可得曲線 Γ'，則兩曲線 Γ、Γ' 所圍成的封閉區域面積為_______。 (以 a 表示)

9.空間中 A(a, a, a)、B(b, b, b)兩點與 xy 平面上兩點 C、D 是某個體積為 72 的正四面體之四頂點，若 $a>b>0$，求 a 值_______。

10. x、y 為任意實數，定義：

$$f(x,y)=\sqrt{(2x-2)^2+(2y-4)^2+(2x-y+9)^2}+\sqrt{(2x+2)^2+(2y+6)^2+(2x-y+11)^2}$$

求 $f(x,y)$的最小值_______。

11. z、w 為複數，

z 滿足：$\left|\dfrac{z-i}{z-1}\right|=k$，其中 $2\le k\le 5$

w 滿足：$w+\overline{w}=-6\sqrt{2}$

求 $\left|z-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}w\right|$的最小值_______。

二、計算題 (須寫出過程方給分)

1. $0<\theta<2\pi$ 且 $\theta\neq\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$，求方程式 $\left|\log\left(\dfrac{|\sin 2\theta|}{2}\right)-2\log\left(|\cos\theta|\right)\right|=5-\tan\theta$ 的實根數。

(8 分)

2. a 為實數，實係數多項式 $f(x)$滿足：

$(x^2+x+1)f(x)=2x^{302}+x^{100}+x^{61}+a$

求：(1) a 值 (2 分)

(2) $f(x)$ 除以 (x^2-x+1) 的餘式 (5 分)

(3) $f(x)$ 除以 (x^2+x+1) 的餘式 (7 分)

3. ΔPQR 為正三角形，點 A、B、C 分別位於 $\overline{PQ}$ 、$\overline{QR}$ 、$\overline{RP}$ 上，且 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CA}=3$，求 ΔPQR 的最大可能面積。 (12 分)