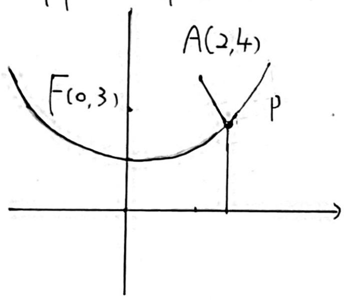
114竹北

13. 在複數平面上，滿足$|z-3i|=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$之所有 z 所形成的圖形為Γ，其中$i=\sqrt{-1}$，$\bar{z}$為z之共軛複數。若$z\in\Gamma$，則$|z+2-4i|+|z-3i|$之最小值為________。

4

令 $z=x+iy$，$P(x,y)$，$F(0,3)$，$L:y=0$

$\overline{PF}=d(P,L) \Rightarrow c=\frac{3}{2}$，$\Gamma: x^2=4\cdot\frac{3}{2}y$



$\overline{PA}+\overline{PF}$

$=\overline{PA}+d(P,L)\geq d(A,L)=4$

14. 已知函數 $f(x)=x^2-x+\sqrt{2x^4-6x^2+8x+16}$ 在 $x=a$ 時有最小值 m，則數對$(a,m)=$________。

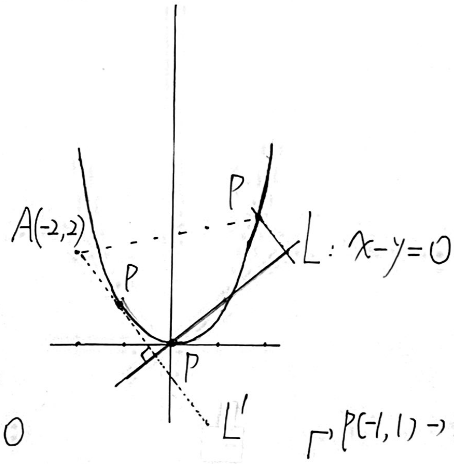
$(0,4)$ or $(-1,4)$

$f(x)=\sqrt{2}\left(\dfrac{x^2-x}{\sqrt{2}}+\sqrt{(x^2-2)^2+(x+2)^2}\right)$

$f(t)=\sqrt{2}\left(\dfrac{t^2-t}{\sqrt{2}}+\sqrt{(t^2-2)^2+(t+2)^2}\right)$

令 $P(t,t^2)\in\Gamma: y=x^2$，$A(-2,2)$，$L:x-y=0$

$\sqrt{2}\left(d(P,L)+\overline{PA}\right)$



$(-2,2)$
$\downarrow$
$L': x+y=0$

$\Gamma \rightarrow P(-1,1) \rightarrow \sqrt{2}\cdot d(A,L)=4$

$P(t,t^2)$代入$L' \Rightarrow t(t+1)=0 \Rightarrow t=-1$ or 0 当$t=0 \Rightarrow P(0,0)$

$\sqrt{2}\cdot\overline{PA}=4$

15. 設 $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x^2}, 0<x<1$，則 $g(x)=f(x)+f(1-x)$ 的最小值為________。

8

$g(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{x^2}+\dfrac{\sin(\pi-\pi x)}{(1-x)^2}$

$=\sin(\pi x)\left(x^{-2}+(1-x)^{-2}\right)$

$g'(x)=\pi\cos(\pi x)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\right)$

$+\sin(\pi x)(-2)\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(1-x)^3}\right)$

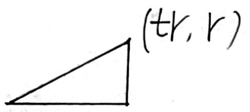
$g'(\frac{1}{2})=0$

$g(\frac{1}{2})=8$

x		$\frac{1}{2}$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	8	$\nearrow$

16. 如右圖(三)，圓 O_1、圓 O_2 都與直線 $L: y=kx$ 及 x 軸相切，若兩圓半徑的乘積為 2，且兩圓的一個交點為 $P(2,2)$，

$y=\frac{4}{3}x$ 則 L 的直線方程式為____________。

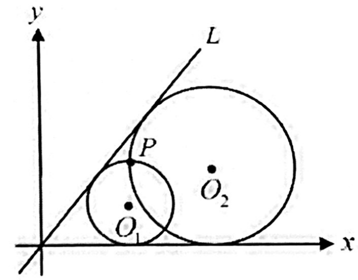


同構法

設 $C: (x-tr)^2+(y-r)^2=r^2$ 过 $(2,2)$

$\Rightarrow t^2r^2-4r(t+1)+8=0$

$\frac{8}{t^2}=r_1r_2=2 \Rightarrow t=2 \Rightarrow m=\frac{1}{2} \Rightarrow k=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$



圖(三)

第二部份、計算證明題（共 20 分）

1. 已知橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左焦點為 F_1，過 F_1 的直線 L 交橢圓 Γ 於 A、B 兩點，點 Q 的座標為

$\sqrt{3}$

$(-\frac{9}{2},0)$。若 $\overline{QB}\perp\overline{AB}$ 且直線 L 的斜率為正，求直線 L 的斜率。（5 分）

2. 矩陣 $A=\begin{bmatrix}7 & 18\\ -3 & -8\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}$，其中 $n=1,2,3,\ldots$，坐標平面上點 $P_n(x_n,y_n)$，

則：

(1)對所有自然數 n，P_n 均落在坐標平面上一直線 L 上，試求 L 之方程式。（1 分，無須過程）

(2)試證明(1)之結論。（5 分）

(3)試以 n 表示 x_n 與 y_n。（4 分）

3. 若正數 x，y 滿足 $xy=4000$，且 $(\log x-\log 2)(\log y-\log 2)=\frac{17}{36}$，

4 則 x，y 中較大數的整數部分為幾位數？（5 分）