2025.3.9(日)~

國立竹北高中 114 學年度第 1 次教師甄選數學科試題卷

(請考生自填)准考證號碼之末三碼：__________ 姓名：____________

第一部份、填充題（每題 5 分，共 80 分）

1. 若 $f(x)=\int_{-1}^{1}(x-t)f(t)dt+1$，則 $f(x)=$________。

$\frac{6}{7}x+\frac{3}{7}$

設 $f(x)=ax+b$

$\Rightarrow ax+b=\int_{-1}^{1}((x-t)(at+b))dt+1$

$=\int_{-1}^{1}(-at^2+(ax-b)t+bx)dt+1$

$=2bx-\frac{2}{3}a+1 \Rightarrow \begin{cases} a=2b \\ b=1-\frac{2}{3}a=1-\frac{4}{3}b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=\frac{6}{7} \\ b=\frac{3}{7} \end{matrix} \Rightarrow \frac{6}{7}x+\frac{3}{7}$

2. 若 x 為正實數，$\sqrt{x}=\frac{1}{2}(1-a)$，則當 $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a+2}$ 恆為一定值時，a 之最大範圍

$a\le -1$ 為________。

$a=1-2\sqrt{x}$

$\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}-\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}$

$=\left|\sqrt{x}-1\right|-(\sqrt{x}+1)$

is a constant

$\Rightarrow \sqrt{x}-1\ge 0 \Rightarrow a\le 1-2=-1$

3. 設一球面半徑為 2，球心在直線 $L: x=\frac{y}{2}=z+1$ 上。令此球面與 xy 平面、yz 平面、xz 平面所交的圓面積和為 S，且當 S 有最大值 M 時，此時的球心座標為 (a,b,c)，求序對 $(M,a,b,c)=$ __________。

$(\frac{67}{6}\pi,\frac{1}{6},\frac{1}{3},-\frac{5}{6})$

設 $O(t,2t,t-1)$　　$S=\pi(4-(t-1)^2+4-t^2+4-(2t)^2)$

$A(t,2t,0)$　　$y=-6t^2+2t+11 \Rightarrow V(\frac{1}{6},\frac{4\cdot 67}{4\cdot 6})$

$B(0,2t,t-1)$　　$\Rightarrow (\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{-5}{6})$　$M=\frac{67}{6}\pi$

$C(t,0,t-1)$

4. 在複數平面上，已知z_1，z_2互為共軛複數，滿足$|z_1-z_2|=4\sqrt{3}$，且$\dfrac{z_1}{{z_2}^2}\in\mathbb{R}$，則

4 $|z_1|=$__________。

令 $z_1=re^{i\theta}$, $z_2=e^{i(-\theta)}$ $\quad |z_1-z_2|=r\,|2i\sin\theta|=r\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{r}e^{i(3\theta)}\in\mathbb{R}$ $\quad \Rightarrow r=4$

$\Rightarrow \theta=\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

5. 從正整數 1 到 99 中任取 9 個數字，假設取出的 9 個數字中最小的數字為 X，

10 則 X 的期望值 $E(X)=$__________。

X	1	2 ⋯	90	91
取法	C^{98}_8	C^{97}_8 ⋯	C^9_8	C^8_8

法2: $C^8_8+C^9_8+\cdots+C^{98}_8\to C^{99}_9 \to C^{100}_{10}$

$C^8_8+C^9_8+\cdots+C^{97}_8\to C^{98}_9$

$\vdots$

$+C^8_8\to C^9_9$

$E=\frac{C^{100}_{10}}{C^{99}_9}=10$

$EX=\frac{1}{C^{99}_9}\sum_{k=8}^{98}\left(100-(k+1)\right)C^k_8$

$=\frac{1}{C^{99}_9}\left(100\cdot\underbrace{(C^8_8+C^9_8+\cdots+C^{98}_8)}_{C^{99}_9}-9\cdot\underbrace{(C^9_9+C^{10}_9+\cdots+C^{99}_9)}_{C^{100}_{10}}\right)$

$=100-9\cdot\frac{100}{10}=10$

法: $(k+1)\cdot\frac{k!}{8!(k-8)!}=9C^{k+1}_9$

法3: 90个平均分布在 9个数字的10个空隙中

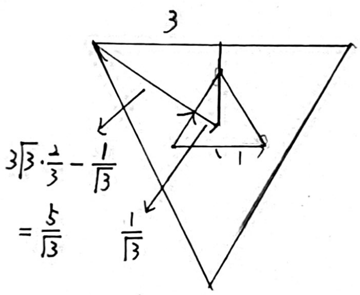
V0V0…0V

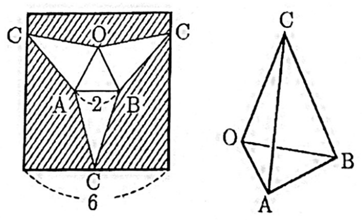
$\frac{90}{9}+1=10$

6. 如下圖(一)，在一張邊長為 6 公分的正方形摺紙圖案中，△OAB 為邊長 2 公分的正三角形，

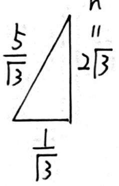
$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ △COA 與△CAB 與△CBO 為三個全等的等腰三角形。將此圖案沿著邊界剪下，組成一個

三角錐 $C-OAB$，則三角錐 $C-OAB$ 之體積為__________立方公分。





圖(一)



$\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4\right)\cdot 2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$