

一、填充題 (第 1~3 題, 每題 5 分; 第 4~8 題, 每題 6 分; 第 9~11 題, 每題 7 分)

1. 同時擲兩個大小不同的骰子一次, 我們將出現點數和為 4 的事件稱為事件 A。今重複投擲上述兩個骰子 500 次, 假設事件 A 恰發生 n 次的機率為 p_n , 則滿足 $p_n < p_{n+1}$ 的正整數 n 之最大值為_____。

2. $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -5$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -6$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -7$, 求 $\triangle ABC$ 面積_____。

3. 袋中有 10 球, 分別編 1~10 號, 每球被取出的機會均等。遊戲規則如下: 每次取一球, 取後不放回, 當「第 $k+1$ 次取出的號碼小於第 k 次取出的號碼」或「10 球全取完」時才停止。若此時取出的總球數為 m , 則可得獎金 ($10 \times m!$) 元。求此遊戲玩一次得獎金的期望值_____元。

4. 已知 a, b, c 為正整數且 $a, b, c < 10$, 若 $ax^2 - bx + 3c = 0$ 之兩根為 α, β , 且 $1 < \alpha < 2$, $5 < \beta < 6$, 求序組 $(a, b, c) =$ _____。

5. x, y 為任意實數, 令 $t = \frac{x^2 + y^2 + 1}{x + 2y + 2}$, 求 t 的範圍_____。

6. 數列 $\{a_n\}$ 滿足:

(1) $a_1 = 500$

(2) 對任意正整數 n , 恆有 $(n+1)(n+2)a_{n+1}a_n - n(n+2)a_{n+1} - (n+1)^2 a_n - (n+1)(n+4) = 0$

求 $a_{998} =$ _____。

7. 平面上有一個三角形 ABC , 同一平面上有一點 P 滿足 $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = k\overrightarrow{AB}$, 若點 P 在 $\triangle ABC$ 的內部, 求實數 k 的範圍_____。

8. 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$, 其中 $a > 0$, 曲線 $\Gamma: y = x^2$ 經過 A 變換後可得曲線 Γ' , 則兩曲線 Γ, Γ' 所圍成的封閉區域面積為_____。(以 a 表示)

9. 空間中 $A(a, a, a), B(b, b, b)$ 兩點與 xy 平面上兩點 C, D 是某個體積為 72 的正四面體之四頂點, 若 $a > b > 0$, 求 a 值_____。

10. x 、 y 為任意實數，定義：

$$f(x, y) = \sqrt{(2x-2)^2 + (2y-4)^2 + (2x-y+9)^2} + \sqrt{(2x+2)^2 + (2y+6)^2 + (2x-y+11)^2}$$

求 $f(x, y)$ 的最小值_____。

11. z 、 w 為複數，

$$z \text{ 滿足： } \left| \frac{z-i}{z-1} \right| = k, \text{ 其中 } 2 \leq k \leq 5$$

$$w \text{ 滿足： } w + \bar{w} = -6\sqrt{2}$$

求 $\left| z - \frac{1+i}{\sqrt{2}} w \right|$ 的最小值_____。

二、計算題 (須寫出過程方給分)

1. $0 < \theta < 2\pi$ 且 $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ，求方程式 $\left| \log \left(\frac{|\sin 2\theta|}{2} \right) - 2 \log (|\cos \theta|) \right| = 5 - \tan \theta$ 的實根數。

(8分)

2. a 為實數，實係數多項式 $f(x)$ 滿足：

$$(x^2 + x + 1)f(x) = 2x^{302} + x^{100} + x^{61} + a$$

求：(1) a 值 (2分)

(2) $f(x)$ 除以 $(x^2 - x + 1)$ 的餘式 (5分)

(3) $f(x)$ 除以 $(x^2 + x + 1)$ 的餘式 (7分)

3. $\triangle PQR$ 為正三角形，點 A 、 B 、 C 分別位於 \overline{PQ} 、 \overline{QR} 、 \overline{RP} 上，且 $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 4$ ，

$\overline{CA} = 3$ ，求 $\triangle PQR$ 的最大可能面積。(12分)