國立竹北高中 114 學年度第 1 次教師甄選數學科試題卷

(請考生自填)准考證號碼之**末三碼**：__________ 姓名：____________

第一部份、填充題（每題 5 分，共 80 分）

1. 若 $f(x)=\int_{-1}^{1}(x-t)f(t)dt+1$，則 $f(x)=$_________。

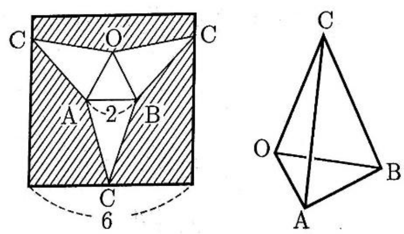
2. 若 x 為正實數，$\sqrt{x}=\frac{1}{2}(1-a)$，則當 $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a+2}$ 恆為一定值時，a 之最大範圍為__________。

3. 設一球面半徑為$\mathbf{2}$，球心在直線 $L: x=\frac{y}{2}=z+1$ 上。令此球面與$\boldsymbol{xy}$平面、yz 平面、xz 平面所交的圓面積和為 S，且當 S 有最大值 M 時，此時的球心座標為$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，求序對$(M,a,b,c)=$ ___________。

4. 在複數平面上，已知$\boldsymbol{z_1}$，$\boldsymbol{z_2}$互為共軛複數，滿足$|z_1 - z_2| = 4\sqrt{3}$，且$\frac{z_1}{{z_2}^2} \in \mathbb{R}$，則$|\boldsymbol{z_1}| =$___________。

5. 從正整數 1 到 99 中任取 9 個數字，假設取出的 9 個數字中最小的數字為X，則X的期望值$E(X) =$_________。

6. 如下圖(一)，在一張邊長為 6 公分的正方形摺紙圖案中，$\triangle OAB$為邊長 2 公分的正三角形，$\triangle COA$與$\triangle CAB$與$\triangle CBO$為三個全等的等腰三角形。將此圖案沿著邊界剪下，組成一個三角錐$C-OAB$，則三角錐$C-OAB$之體積為_________立方公分。



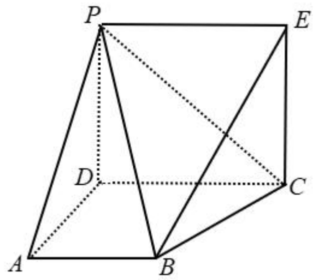
圖(一)

7. 若 $a>0$，函數 $y=f(x)=x^3-3a^2x$ 的圖形與方程式 $|x|+|y|=2$ 之圖形，有 6 個相異之交點，則 a 之範圍為_____________。

8. 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}a_n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n+2^n}$，設 $b_n=\dfrac{2^n}{a_n}$，則 $b_n=$__________。（以 n 表示）

9. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BC}=2$，$\angle BAC=2\theta$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，若 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑為 R，內切圓半徑為 r，則 $\dfrac{r}{R}$ 之最大值為_______。

10. 如右圖(二)，$\overline{PD}$垂直於梯形$ABCD$所在的平面，$\angle ADC=\angle BAD=90^{\circ}$，$\overline{PD}=\sqrt{2}$，$\overline{AB}=\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=1$，四邊形$PDCE$為矩形，若$F$為$\overline{PA}$中點，$Q$為$\overline{EF}$上一點，且$\overline{BQ}$與平面$BCP$所夾的角為$\dfrac{\pi}{6}$，則$\overline{FQ}=$________。



圖(二)

11. 已知函數 $f(x)$ 的定義域是實數R，且$f(x+2)-2$是奇函數，$f(2x+1)$是偶函數。若 $f(1)=0$ ，試求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2025)=$________。

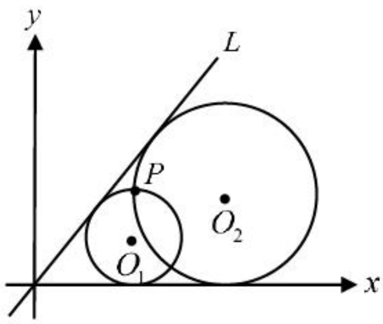
12. 設(x,y)滿足$\begin{cases}(y-x)\left(y-\dfrac{18}{25x}\right)\geq 0\\ (x-1)^2+(y-1)^2\leq 1\end{cases}$，則$2x-y$的最小值為________。

13. 在複數平面上，滿足$|z-3i|=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$之所有$z$所形成的圖形為$\Gamma$，其中$i=\sqrt{-1}$，$\bar{z}$為$z$之共軛複數。若$z\in\Gamma$，則$|z+2-4i|+|z-3i|$之最小值為________。

14. 已知函數$f(x)=x^2-x+\sqrt{2x^4-6x^2+8x+16}$在$x=a$ 時有最小值m，則數對$(a,m)=$ _________。

15. 設$f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x^2},0<x<1$，則$g(x)=f(x)+f(1-x)$的最小值為_________。

16. 如右圖(三)，圓 O_1、圓 O_2 都與直線 $L: y=kx$ 及 x 軸相切，若兩圓半徑的乘積為 2，且兩圓的一個交點為 $P(2,2)$，則 L 的直線方程式為____________。



圖(三)

第二部份、計算證明題（共 20 分）

1. 已知橢圓 $\Gamma: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左焦點為 F_1，過 F_1 的直線 L 交橢圓 Γ 於 A、B 兩點，點 Q 的座標為 $(-\dfrac{9}{2},0)$。若 $\overline{QB}\perp\overline{AB}$ 且直線 L 的斜率為正，求直線 L 的斜率。（5 分）

2. 矩陣 $A=\begin{bmatrix}7 & 18\\ -3 & -8\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}$，其中 $n=1,2,3,\ldots$，坐標平面上點 $P_n(x_n,y_n)$，則：

   (1)對所有自然數 n，P_n 均落在坐標平面上一直線 L 上，試求 L 之方程式。（1 分，無須過程）

   (2)試證明(1)之結論。（5 分）

   (3)試以 n 表示 x_n 與 y_n。（4 分）

3. 若正數 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 滿足 $xy=4000$，且 $(\log x-\log 2)(\log y-\log 2)=\frac{17}{36}$，則 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 中較大數的整數部分為幾位數？（5 分）

【試題到此結束】