

# 國立陽明交通大學應用數學系

113 學年度大學申請入學考試試題

說明：

- (1) 答題之前請先檢查所取得之答案卷是否正確。
- (2) 本試卷共五題計算證明題，總分共計 100 分。測驗時間為 100 分鐘。
- (3) 答題時，請仔細寫下解題與計算過程。若只寫答案，則該題不予計分。
- (4) 請依題號順序作答。
- (5) 繳卷時請同時繳回題目卷。

**第一題** (20%)

- (1) (5%) 假設  $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$  是實數，試問以下不等式是否成立？若成立，何時等號成立？請給出理由。

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}。$$

- (2) (5%) 假設  $a$  和  $b$  是非負實數，試問以下不等式是否成立？若成立，何時等號成立？請給出理由。

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}。$$

- (3) (10%) 一長方體其邊長總和為 12，試求邊長（即長、寬、高）為何時，其體積最大？

第二題 (20%)

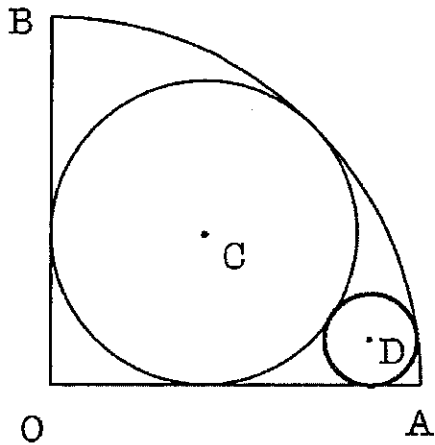


Figure 1: 圖一

- (1) (5%) 以下方程式有幾個解? 原因為何?

$$x^3 - \frac{1}{2^x} = 0.$$

- (2) (5%) 找出以下函數的最大值?

$$f(x) = -8 \cos^2 x - 8 \cos 2x + 12 \sin 2x + 8.$$

- (3) (10%) 如圖一所示, 扇形 OAB 為半徑  $1 + \sqrt{2}$  的  $\frac{1}{4}$  圓, 其圓心在 O 點。若大圓為扇形 OAB 的內切圓, 其圓心為 C; 小圓為另一個內切圓, 其圓心為 D。若小圓的半徑為  $\frac{\alpha}{49}$ , 求  $\alpha$  為何?

**第三題** (20%) 假設  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 、 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  和  $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$  是空間中的向量。這裡  $a_j$ 、 $b_j$ 、 $c_j$ 、 $d_j$ ， $j = 1, 2, 3$ ，是實數。

(1) (7%) 請證明  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \sum_{1 \leq j < k \leq 3} (a_j b_k - a_k b_j)(c_j d_k - c_k d_j)$ 。

(2) (7%) 請證明  $\left| \begin{array}{cc} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{array} \right| = \sum_{1 \leq j < k \leq 3} (a_j b_k - a_k b_j)(c_j d_k - c_k d_j)$ 。

(3) (6%) 假設  $\theta$  是正四面體中的任何兩面的夾角，請求出  $\cos \theta = ?$

**第四題** (20%) 假設  $f(x)$  是定義在實數線  $\mathbb{R}$  上不恆為零的函數，且滿足關係式  $f(2) = 2$  和對任意的實數  $a$  與  $b \in \mathbb{R}$ ， $f(a \cdot b) = a \cdot f(b) + b \cdot f(a)$ ；以及對所有自然數  $n \in \mathbb{N}$ ，定義  $a_n = \frac{f(2^n)}{n}$  和  $b_n = \frac{f(2^n)}{2^n}$ 。

(1) (4%) 請試求  $f(0)$  和  $f(1) = ?$

(2) (5%) 請證明數列  $\{a_n\}$  是等比數列並求出公比。

(3) (3%) 請證明數列  $\{b_n\}$  是等差數列並求出公差。

(4) (8%) 請問函數  $f$  是奇函數、偶函數還是都不是以上二者？請證明！

**第五題** (20%) 將 1 到 50 這 50 個正整數平分甲乙兩組，每組各 25 個數。對於正整數  $k$ ，若  $M(k)$  為甲組的中位數比乙組中位數小  $k$  的分法，請回答下面問題：

- (1) (7%) 若已知甲組中位數比乙組中位數小 1，請問甲組的最大值比乙組的最小值大 47 且乙組的最大值比甲組的最小值也大 47 的機率為何？
- (2) (7%) 請試求  $M(k=2)$  為何？
- (3) (6%) 請試求最大正整數  $k$ ，使得  $M(k)$  不是 0？