第一部份 填充題 50%

2024.8.9(五)

Ru

1. 已知 $z=x+yi(x,y\in R,x\neq 0)$ 且 $|z-2|=\sqrt{3}$，則 $\frac{y}{x}$ 的最大值為 ______。(5 分)

切線 L: $y=m(x-2)\pm\sqrt{3m^2+3}$

$\boxed{1}$ $z\in C: (x-2)^2+y^2=3$

$(0,0)$ 代入 L

$\Rightarrow m=\pm\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}$

ANS：$\sqrt{3}$

2. 請解出下列方程組實數解(以數對形式呈現) (5 分)

$$\log_9 x+\log_9 y+\log_3 z=2$$
$$\log_{16} x+\log_4 y+\log_{16} z=1$$
$$\log_5 x+\log_{25} y+\log_{25} z=0$$

$xyz^2=81$

$xy^2z=16$

$\times)\ x^2yz=1$

$\Rightarrow xyz=3\cdot 2=6$

$\Rightarrow (x,y,z)=(\frac{1}{6},\frac{8}{3},\frac{27}{2})$

ANS：$(x,y,z)=(\frac{1}{6},\frac{8}{3},\frac{27}{2})$

$\boxed{3}$
$\begin{cases} a+b=2 \\ a+2b=3 \end{cases}$
$\Rightarrow (a,b)=(1,1)$

3. $f(x)=\frac{2x}{ax+b}$，$f(1)=1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$，若數列 $\{x_n\}$ 滿足 $x_{n+1}=f(x_n)$，且 $x_1=\frac{1}{2}$，求 x_n 的一般式為__________。(5 分)

$x_n=\frac{2x_{n-1}}{x_{n-1}+1} \Rightarrow \frac{1}{x_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n-1}}\right)+\frac{1}{2}$

ANS：$x_n=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

$k=\frac{1}{2}k+\frac{1}{2} \Rightarrow k=1 \Rightarrow \left(\frac{1}{x_n}-1\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}-1\right) \Rightarrow x_n=\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^{n-1}}$

4. 如圖一拋物線頂點為 D，與 x 軸交點為 A、$C(4,0)$，與 y 軸交點為 $B(0,-4)$。若 ΔABC 之面積為 4，試求 ΔDBC 之面積。(5 分)

8. $0<k<18$ 且 k 為整數，若 $\frac{5\sin(10k^{\circ})-2}{\sin^2(10k^{\circ})}\geq 2$，則 k 有多少可能之值？(5 分)

$\frac{1}{2}\leq \sin\left(\frac{\pi}{18}k\right)\leq 1$

$2s^2-5s+2\leq 0$

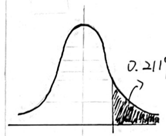
$\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix}$

$\Rightarrow \frac{3}{18}\pi+2n\pi\leq\frac{k\pi}{18}\leq\frac{15}{18}\pi+2n\pi$

$\Rightarrow k=3,4,\cdots,15 \Rightarrow 15-3+1=13$

ANS：13

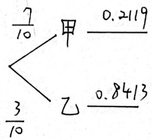
9. 一生鮮超市向甲、乙兩供應商購買哈密瓜。甲供應商哈密瓜來自有機農場，其所栽植之哈密瓜直徑近似常態分配，甲供應商哈密瓜直徑之平均值為 133 mm，標準差為 5 mm。乙供應商哈密瓜來自非有機農場，其所供應之哈密瓜直徑大於 137 mm 的機率為 0.8413。該生鮮超市之哈密瓜有七成為甲供應商所供應，三成為乙供應商所供應。若標準常態分配 $Z>0.8$ 之機率為 0.2119，向該生鮮超市隨機選購一顆哈密瓜，已知哈密瓜直徑大於 137 mm，則該顆哈密瓜來自於甲供應商的機率為何？(5 分)



$=133+4$

$=133+5\times\frac{4}{5}$

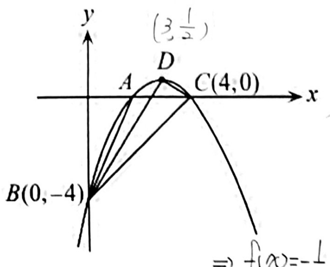
$\boxed{9}$



$\frac{7\times 2119}{7\times 2119+3\times 8413}$

ANS：$\frac{14833}{40072}$

10. 如圖，P、Q 為正方形 $ABCD$ 內兩點使得 $\overline{DP}//\overline{BQ}$ 且 $\overline{DP}=\overline{PQ}=\overline{BQ}$，則 $\angle ADP$ 之最小可能為何？(5 分)



$\triangle ABC = 4 = \frac{1}{2}(4-\square)\cdot 4$

$\Rightarrow A(2,0)$

令 $f(x)=A(x-2)(x-4)$

$f(0)=8A=-4$

$\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{1}{2}$

$\triangle BDC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & \frac{9}{2} \\ 4 & 4 \end{vmatrix}\right|$

$=3$

ANS : 3

$\boxed{5}$

5. 甲乙兩人輪流擲一公正硬幣，第一局甲先擲，以先擲出正面者為勝，而上一局的輸者下一局可先擲，試求第 n 局甲勝的機率為__________。(以 n 表示) (5 分)

$P(\text{先丟 win})$

$=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^4\cdot\frac{1}{2}+\cdots$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow P(\text{後丟 win})=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow P_n=(1-P_{n-1})\cdot\frac{2}{3}+P_{n-1}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{2}{3}$

$k=-\frac{1}{3}k+\frac{2}{3}\Rightarrow k=\frac{1}{2}\Rightarrow P_n-\frac{1}{2}=(-\frac{1}{3})^{n-1}(\frac{1}{6})$, $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$, $\hookrightarrow (-\frac{1}{3})(-\frac{1}{2})$ $\Rightarrow P_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-\frac{1}{3})^n$

ANS : $\frac{1}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$

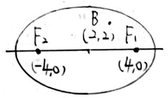
$\boxed{6}$

6. 已知 $A(4,0)$, $B(2,2)$ 是橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 內的點，若 M 為橢圓上動點，則 $\overline{MA}+\overline{MB}$ 的最大值為__________。(5 分)

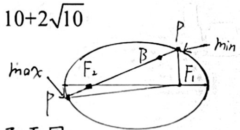
$\overline{PF_1}+\overline{PB}\in[2a-\overline{BF_2},\,2a+\overline{BF_2}]$

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a\Rightarrow \overline{PF_1}+\overline{PB}=2a+\overline{PB}-\overline{PF_2}\le 2a+\overline{BF_2}$

$=10+2\sqrt{10}$



ANS : 10+2$\sqrt{10}$

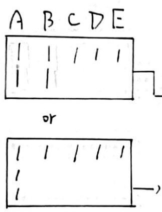


$\boxed{7}$

7. 有甲乙丙…庚 7 名同學參加 5 個運動項目，今要求甲、乙兩同學不能參加同一個項目，每個項目都要有人參加且每人只能參加一個項目，則滿足上述要求有__________種不同的參賽組合。(5 分)

甲乙丙丁戊己庚

A B C D E



$\left(\frac{C^7_2 C^5_2}{2!}-\frac{C^2_2 C^5_2}{2!}\right)\cdot 5!$

$\hookrightarrow 105-10$

or

$\hookrightarrow (C^7_3-C^2_2C^5_1)\cdot 5!$

$\downarrow$

30

$(125\times 120)\cdot\frac{8}{8}$

$=\frac{120000}{8}$

$=15000$

ANS : 15000

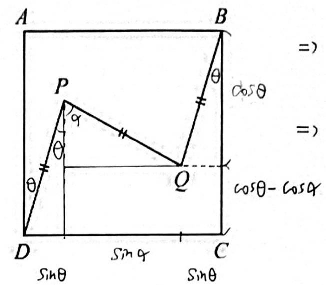
$2\sin\theta+\sin\alpha=2\cos\theta-\cos\alpha$

$\Rightarrow 2(\sin\theta-\cos\theta)=-(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$\Rightarrow 4-4\sin(2\theta)=1+\sin(2\alpha)$

$\Rightarrow \sin(2\theta)=\frac{3-\sin(2\alpha)}{4}$, $-1\le\sin(2\alpha)\le 1$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}\le\sin(2\theta)\le 1\Rightarrow \theta\ge 15^\circ$



ANS : 15°

第二部份 計算證明題 30%

1. 已知平面內動點 P 到 $F(1,0)$ 的距離與點 P 到 y 軸的距離差為 1，求：

(1) 此動點 P 的軌跡方程式？(4 分)

(2) 過 F 做兩條互相垂直的直線 L_1，L_2。設 L_1 與 P 點軌跡相交於點 A 和 B，L_2 與 P 點軌跡相交於點 C 和 D，求 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的最小值？(6 分)

2. 一函數 $f(x)$ 之定義域為閉區間 $[-2,8]$ 且滿足 $f(2)=1$。該函數之一階導數圖形 $f'(x)$ 包含兩線段及一半圓(如圖)，試回答下列問題：