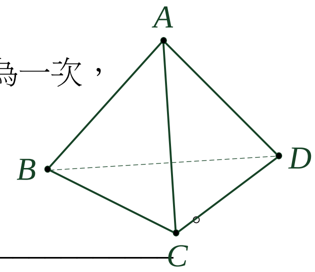
臺北市立中山女子高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選

數學科題目(測驗題型部分)

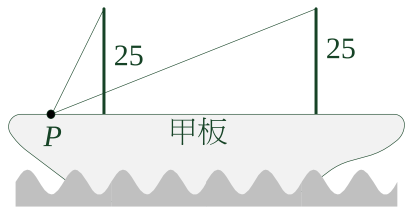
1. 若 $f(n)=\left(n^2-2n+1\right)^{\frac{1}{3}}+\left(n^2-1\right)^{\frac{1}{3}}+\left(n^2+2n+1\right)^{\frac{1}{3}}$，求 $\sum_{k=1}^{500}\dfrac{1}{f(2k-1)}=$______ 。

2. 各邊長皆不相等的五邊形 $ABCDE$，有五種顏色可以選擇去塗各邊，一邊一色且相鄰邊必須異色，則有_____種塗法。

3. 已知 $ABCD$ 為正四面體，有一隻小蟲反覆在四個頂點之間移動，它從一個頂點爬行至另一頂點稱為一次，已知小蟲從一頂點爬行到任一相鄰頂點的機率均相同，今小蟲從 A 點開始出發沿稜線爬行至 B、C、D 其中一點，設 a_n 表示小蟲爬行 n 次後在 A 點的機率。可以寫出一般式 $a_n=$____________________。



4. 設一艘船上有兩根高度相等，且與水平甲板垂直的船杆，其長皆為 25 公尺，彼此相距 50 公尺，今有一條 100 公尺長的繩子兩端繫於船杆頂，當將繩子拉直時，與甲板接觸點為 P，如右圖所示，則點 P 與較近船杆間的距離為________公尺。



5. 在坐標平面上，考慮二階方陣 $A=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ 所定義的線性變換。對於平面上異於原點 O 的點 P_1，設 P_1 經 A 變換成 P_2，P_2 經 A 變換成 P_3。假設 P_1 是圖形 $y=\dfrac{1}{10}x^2-10$ 上的動點，則 $\Delta P_1P_2P_3$ 面積的最小可能值為________ 。

6. 卡當諾(Girolamo Cardano, 1501-1576)所著的《偉大的技藝(*Ars Magna*，英譯為 *The Great art*)》書中有一題有趣的三角形面積問題：

There is a triangle the difference between the first and the second sides of which is 1 and between the second and third sides of which is also 1, and the area of which is 3. What is the largest side length? Ans：_______ 。

7. 設 $f(x)$ 為正值函數(函數值皆為正數)且為可微分函數，對任意實數 x、y，滿足 $f(x+y)=2f(x)f(y)$， 若 $f'(0)=2$，則 $\dfrac{f''(x)}{f(x)}=$____ 。

8. 若 $[x]$ 表示實數 x 的高斯函數值，則 $\left[\dfrac{1}{20}\times\dfrac{999^{1000}}{1000^{999}}\right]=$_____ 。

9. ΔABC 中，$A(4,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(0,0,4)$，M 為 $\overline{BC}$ 中點，今將 C 點沿 $\overline{AM}$ 對折至 C' 點使 $\overline{BC'}=2\sqrt{2}$，若 C' 的z坐標為正，且 C' 在平面ABC的投影點為H，則平面 $HC'B$ 的方程式為________ 。

10. 已知 $\tan 10\theta=\dfrac{a_1\cdot\tan\theta+a_3\cdot\tan^3\theta+a_5\cdot\tan^5\theta+a_7\cdot\tan^7\theta+a_9\cdot\tan^9\theta}{a_0+a_2\cdot\tan^2\theta+a_4\cdot\tan^4\theta+a_6\cdot\tan^6\theta+a_8\cdot\tan^8\theta+a_{10}\cdot\tan^{10}\theta}$，則 $\sum_{k=0}^{10}\left|a_k\right|=$_______ 。

臺北市立中山女子高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選數學科題目

（記憶版）

二、證明及問答題（每題 10 分，共 30 分）

1. 已知：$a>0$ 且 $b>0$，$\dfrac{\sin^4 x}{a}+\dfrac{\cos^4 x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$，求證：$\forall n\in\mathbb{N}$，$\dfrac{\sin^{2n} x}{a^{n-1}}+\dfrac{\cos^{2n} x}{b^{n-1}}=\dfrac{1}{(a+b)^{n-1}}$ 恆成立。

2. 已知 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，且 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 為方程式 $2x^2+px+q=0$ 的兩根，求 p^2-8q 的值。

   某生的解法為：

   由 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\theta=\cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow (\cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}})^2+\cos^2\theta=1$

   $$\Rightarrow 2\cos^2\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta-\frac{2}{3}=0$$

   因為 $\cos\theta$ 為方程式 $2x^2+px+q=0$ 的根，比較係數可得 $\begin{cases} p=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ q=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$，所以 $p^2-8q=(\dfrac{2}{\sqrt{3}})^2-8(-\dfrac{2}{3})=\dfrac{20}{3}$ 。

   試問上述解法是否正確，若不正確，請指出錯誤並說明正確解法。

3. 若函數 $f(x)$ 滿足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$，則下列何者正確？

   (1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$　　(2) $x-1$ 為 $f(x)$ 的因式　　(3) $f(1)=0$　　(4) $f'(1)=3$

   此題大部分的學生會認為答案是(1)(2)(3)，請完整詳細地解釋每個選項如何判斷，並選出正確答案。