國立高雄師範大學附屬高級中學113學年度第1次教師甄選數學科試題

1. 已知O為ΔABC的外心，$\overline{AB}$的長度為$2l$，$\overline{AC}$的長度為$\frac{2}{l}$，$\angle BAC=120^\circ$，若向量$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，試求$x+y$的最小值。

2. 已知函數$f(x)=x^2+ax+\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}+b$，其中$x$為非零實數。若實數$a,b$使得$f(x)=0$有實根，試求$a^2+b^2$的最小值。

3. 已知常數e為自然底數，且函數$f(x)=e^x(x-ae^x)$恰有兩個不同的極值點，試求實數a的取值範圍。

4.長方形紙片 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=6$、$\overline{AD}=2\sqrt{3}$，今將此長方形紙片，沿對角線 $\overline{AC}$ 折起。使折起後的半平面 ACD 與半平面 ABC 所夾的兩面角為$\frac{\pi}{3}$，求$\overline{BD}$的長度

5.在坐標平面上，將一個過原點且半徑為 r 的圓，完全放入 $y\geq x^4$ 的區域內，此時 r 的最大值為何?

6.設$x\in\mathrm{R}$，則 $f(x)=\left|\frac{x^2+24}{8}\right|-\sqrt{\frac{x^4}{64}+\frac{x^2}{2}-\frac{9x}{2}+\frac{145}{16}}$ 之最大值為何?

7.有一個遊戲的規則如下：從一個裝有編號 1~9 號共 9 顆球的箱子中一次抽出三顆相異的球，若所得的 3 個號碼滿足下列條件 A 或條件 B 之一，則可得獎金 100 元；若條件 A、B 都滿足，則可得獎金 400 元；若條件 A、B 均不滿足，則無獎金。求此遊戲獲得獎金的期望值。
條件 A：三個號碼皆為奇數或皆為偶數。
條件 B：三個號碼由小排到大為等差數列。

8.坐標平面上，A、B 兩點分別在直線 $L_1: x=-\frac{3}{2}$ 與 $L_2: x=\frac{3}{2}$ 上。$\overline{AB}\perp L_1$，且 M、N 為 $\overline{AB}$ 的三等分點，並滿足 $\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{NB}$。設 Γ_1 為以 L_1 為準線，N 為焦點的拋物線；Γ_2 為以 L_2 為準線，N 為頂點的拋物線，求 Γ_1 與 Γ_2 所圍區域的面積。

9.坐標平面上，$y=2^{-x}$ 與 $y=\cos(2x+\pi)+\frac{1}{2}$ 的圖形在 y 軸右側的交點由左而右依序為 $A_1, A_2, A_3, \ldots$。若以 x_k 表示點 A_k 的 x 坐標，並定義數列 $\langle C_n\rangle=\langle x_{2n}-x_{2n-1}\rangle$，求 $\lim_{n\to\infty} C_n$。

10.求以橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$ 內接正方形四個頂點中的其中兩個為焦點，另外兩個為頂點的橢圓方程式。