

7. 某國家的地鐵車廂共有8節，該國最近舉辦神奇寶貝動漫祭，今天要在某一列車中，取出5節車廂畫上神奇寶貝的圖樣，每節車廂均畫上完全不同的神奇寶貝，其候選圖案如下：

W 水系：傑尼龜、小鋸鱈、波加曼

F 火系：小火龍、火球鼠、小火焰猴

G 草系：妙蛙種子、菊草葉、草苗龜

電氣系：皮卡丘

在彩繪時有以下限制：

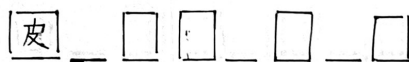
(I) 在未畫上圖樣的車廂均設立廁所，且任2間設立廁所的車廂均不相鄰；

(II) 皮卡丘必須畫在第一節車廂，且最後一節車廂必須彩繪；

(III) 水系、火系、草系神奇寶貝皆至少各選1隻來彩繪；

(IV) 水系神奇寶貝的車廂必須相鄰，且必須畫在「火系與草系神奇寶貝車廂」前方。

請問：在這些限制條件下，彩繪車廂的方法共有 1404 種。



$$W_1, W_2, F, G \rightarrow 2! \cdot 2! = 4$$

$$(24 + 24 + 4) C_3^1 C_3^1 C_3^1$$



$$6 - 3 = 3 \rightarrow C_3^1 = 4 \text{ (滿足(I))}$$

$$= 52 \cdot 27$$

$$W, F, F, G$$

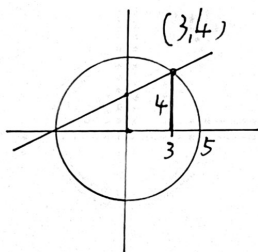
$$\rightarrow 3! \times 4 = 24$$

$$= 1404$$

$$W, F, G, G$$

$$\rightarrow 3! \times 4 = 24$$

8. 將區域  $R = \begin{cases} y \leq \sqrt{25-x^2} \\ x-2y+5 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$  繞  $x$  軸旋轉一圈後，得到立體圖形的體積為  $60\pi$  立方單位。



$$\frac{1}{3} (\pi \cdot 4^2 \cdot 8) + \int_3^5 \pi (25 - x^2) dx$$

$$= 50\pi + \frac{1}{3} (128 - 125 + 27)\pi$$

$$= 60\pi$$

9. 已知  $z = -\frac{2}{1+\sqrt{3}i}$ , 求  $\frac{1}{5} + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{2024} + z^{2025} = \underline{\frac{1}{5}}$ 。

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{e^{i(\frac{\pi}{3} + \pi)}} & 2025 &\equiv 0 \pmod{3} \\ &= e^{i(-\frac{4}{3}\pi)} & z + z^2 + z^3 &= 0 \\ &= e^{i(\frac{2}{3}\pi)} & \Rightarrow & \frac{1}{5} \end{aligned}$$

10. 投擲兩顆骰子 24 次，令  $X$  表示第一顆骰子出現點數大於第二顆骰子出現點數的個數，則  $\text{Var}(X) = \underline{\frac{35}{6}}$ 。

#1 顆	#2 顆
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{(5+1) \cdot 5}{2} = \frac{5}{12}$$

$$X \sim \text{Bin}(n=24, p=\frac{5}{12})$$

$$\text{Var}(X) = 24 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{6}$$

11. 在不大於  $10^4$  的正整數中，有多少個數 5429 可以被 3、5、與 7 整除。

$$\left[ \frac{10^4}{3} \right] + \left[ \frac{10^4}{5} \right] + \left[ \frac{10^4}{7} \right] - \left[ \frac{10^4}{15} \right] - \left[ \frac{10^4}{21} \right] - \left[ \frac{10^4}{35} \right] + \left[ \frac{10^4}{105} \right]$$

$$= 3333 + 2000 + 1428 - 666 - 476 - 285 + 95$$

$$= 5429$$