

\square 令 $t = \frac{1}{2} \log_a b$
 $6t^2 - 5t + 1 = 0$
 $\Rightarrow \log_a b = \frac{1}{3}$ or $\frac{1}{2}$
 $\Rightarrow Q = b^3$
 $a = b^2$

a	b	a	b
4	2	8	2
9	3	27	3
1936	44	12^3	12

$43+11=54$
 $m_2 = \frac{-12}{5}$
 L_2
 $L_3, m_3 = \frac{4}{3}$
 $L_1, m_1 = \frac{-16}{2} = -8$

\square 令 $z^2 = e^{i\theta}$, $z^4 = e^{i(2\theta)}$
 $\tan(2\theta) = \frac{-1/2}{5} = \frac{-2t}{1-t^2}$
 $\Rightarrow 6t^2 - 5t - 6 = 0$

國立嘉義高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選 - 數學科試題

一、填充題：共 18 題，每題 5 分，合計 90 分。

\square $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{d}{dx} (1-x)^{-1} = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{b}{a} = \frac{-2}{3}$

1. 若 a, b 為小於 2024 的正整數且 $\log_a b + 6\log_b a = 5$ ，則數對 (a, b) 有 54 組可能

$(-8, \frac{1}{5}, \frac{4}{3})$

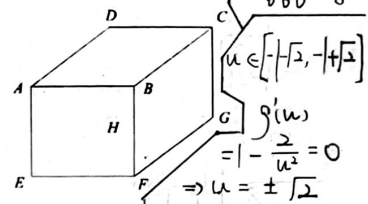
2. 坐標平面上三直線 L_1, L_2, L_3 ，其斜率分別為 m_1, m_2, m_3 。已知 L_2, L_3 交於 $P(a_1, b_1)$ ， L_1, L_3 交於 $Q(a_2, b_2)$ ， L_1, L_2 交於 $R(a_3, b_3)$ ，若 L_1 向右平移若干單位後，三交點依序變為 $P'(a_1, b_1), Q'(a_2+3, b_2+4), R'(a_3+5, b_3-12)$ ，則有序數組 $(m_1, m_2, m_3) =$ 。

3. 在複數平面上，複數 z^2 在第二象限，滿足 $|z|=1$ 以及 $|\frac{5-12i}{13} - z^3| = |\frac{5-12i}{13} - z^5|$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。若 z^2 的實部為 a 、虛部為 b ，則 $\frac{b}{a}$ 之值為 。

A	B	C	D
E	F	G	H
S1	S2	S3	S4

4. 一隻小蟲沿著一個正立方體 $ABCD-EFGH$ 的邊爬行。牠從頂點 A 出發，每分鐘均會從一個頂點走到另一個相鄰的頂點。走了 9 分鐘後，小蟲走到點 G ，請問小蟲所走的路線有 種不同的可能。

$S_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



5. 若 $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ ，則 $f(x) = |\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$ 的最小值為 。

6. 已知 a 為整數，且 $f(x) = -x^3 - 2x$ 。對任意實數 x ， $f(ax^2 - 3ax) > f(a+26)$ 恆成立，則滿足上述條件之 a 的個數有 8 個。

7. 若同時擲三顆公正骰子，當點數和為 10 時，可得 50 元獎金，並可繼續遊戲，否則就停止。如此繼續進行，試求此遊戲的獎金期望值為 50/7 元。

8. 若 $f(x)$ 為實係數二次多項式，已知 p, q, r 為三相異非零實數使得 $f(p) = qr, f(q) = rp, f(r) = pq$ ，試以 p, q, r 表示 $f(p+q+r) =$ (請化至最簡)。

9. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{10n} \frac{400n^2}{400n^2 + (2k-1)^2} =$ 。

10. 坐標平面上， S 為 $A(10,10), B(-10,10), C(-10,-10), D(10,-10)$ 四點所形成的正方形， S 經矩陣 $\begin{pmatrix} \frac{7}{5} \cos \theta & -\frac{7}{5} \sin \theta \\ \frac{7}{5} \sin \theta & \frac{7}{5} \cos \theta \end{pmatrix}$

變換後為 S' (其中 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$)，若 A, B, C, D 恰好在 S' 的邊界上，則 $\sin \theta$ 之值為 。

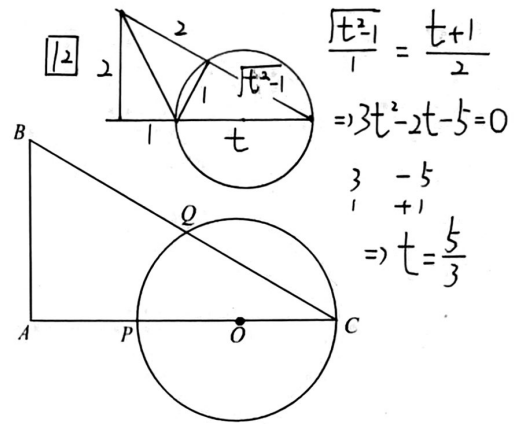
\square 設 $A(7,6,3), B(5,-1,2)$ 與一直線 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$ ，若在 L 上任取一點 P ，使得 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值，求 P 點坐標 。

$P(2t+1, t, -2t+3)$
 $= \sqrt{9t^2 - 36t + 72} + \sqrt{9t^2 - 18t + 18}$
 $= 3(\sqrt{(t-2)^2 + (-2-0)^2} + \sqrt{(t-1)^2 + (-1-0)^2})$

$L: 3x+y=4$
 $\Rightarrow t = \frac{4}{3}$
 $\Rightarrow P(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

$L: x+y=7$
 $\Rightarrow S+C = \frac{7}{5}$
 $S-C = \frac{1}{5}$
 $\Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{5}$

12. 如圖所示，直角 $\triangle ABC$ 與以 \overline{PC} 為直徑的圓交於 P 、 Q 兩點，若 $\overline{AP}=1$ 、 $\frac{5}{3}\overline{AB}=\overline{BQ}=2$ ，則圓形紙板的直徑為_____。



$$\frac{|t-1|}{1} = \frac{t+1}{2}$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 2t - 5 = 0$$

$$\begin{matrix} 3 & -2 & -5 \\ & 1 & +1 \\ \hline & & 5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow t = \frac{5}{3}$$

13. $\frac{7\pi}{32} P(2C+1, 3S-2)$

$$4C - 3S = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5} \left(\frac{4}{5} \right) - \frac{3}{5} \left(\frac{-3}{5} \right) \right)$$

$$C = \frac{4}{5}, S = \frac{-3}{5}, P \left(\frac{13}{5}, \frac{-19}{5} \right)$$

13. 設點 $P(x, y)$ 在橢圓 $\Gamma: \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ 上，試求點 P 到直線 $L: 2x - y + 6 = 0$ 有最大距離時的 P 點坐標_____。

14. 假設空間坐標系中滿足 x, y, z 坐標均為整數的點稱為格子點。現有三點 $A(1, 2, 3), B(2, 3, 1), C(2t, 1, -1+t)$ 滿足 $\triangle ABC$ 面積不超過 $3\sqrt{5}$ ，則格子點 C 共有_____個。

14. $\Rightarrow 5t^2 - 2t - 18 \leq 0$

$$\begin{matrix} 5 & -2 & -18 \\ & 1 & -2 \\ \hline & & 5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 30t^2 - 72t + 72 \leq 6 \cdot 6 \cdot 5$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 2t - 18 \leq 0$$

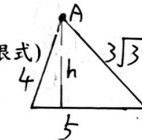
$$t = -1, 0, 1, 2, 3$$

$$\begin{matrix} 3 & -2 & -18 \\ & 1 & -2 \\ \hline & & 5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & -2 & -18 \\ & 1 & -2 \\ \hline & & 5 \end{matrix}$$

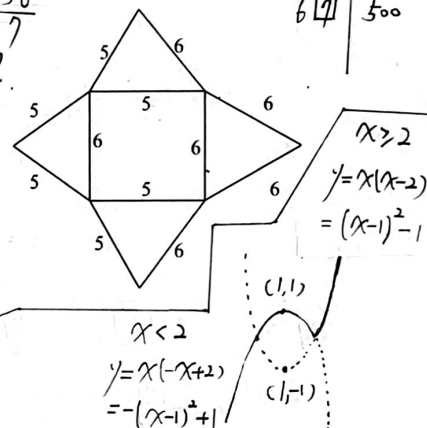
15. 有一底面為矩形的四角錐，其展開圖與邊長如右圖所標示，則此四角錐的體積為_____。(化成最簡根式)

15. $6\sqrt{39}$



$$\cos A = \frac{18}{2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot \frac{3\sqrt{39}}{5} = 6\sqrt{39}$$



16. 設 k 為實數，若方程式 $x|x-2|=4x+k$ 恰有一個實根，則 k 的範圍為_____。

16. $k > 1$ or $k < -9$

$$x \geq 2: x^2 - 6x - k = 0$$

$$x < 2: x^2 + 2x + k = 0$$

$$D < 0 \Rightarrow k < -9$$

$$D < 0 \Rightarrow k > 1$$

17. 小明在113年1月初向銀行借貸100萬元，以月利率2%複利計算。若他自113年1月開始，每個月月底都償還銀行相同的金額，且計畫在兩年(即24個月)內還清，則他每個月至少需償還_____元。(無條件進位計算到整數位)

17. 52871

且 $(1.02)^{24}$ 約為1.60843。

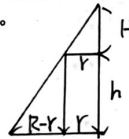
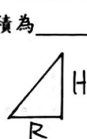
$$\Rightarrow x \geq \frac{100 \cdot 1.02^{24} / 0.02}{1.02^{24} - 1} = 52871.4 \dots$$

17. $\frac{x(1.02^{24}-1)}{1.02-1} \geq 100 \times 1.02^{24}$

18. 設一直圓錐底半徑為3，高為12，有一直圓柱內接於此直圓錐，如右圖所示，則此直圓柱的最大體積為_____。

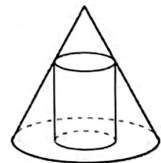
18. 16π

18



$$\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r} \Rightarrow \frac{H}{R} + \frac{h}{H} = \frac{r}{2R} + \frac{r}{2R} + \frac{h}{H}$$

$$\Rightarrow rH + Rh = RH \Rightarrow r \geq 3 \cdot \left(\frac{r^2 h}{4R^2 H} \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow r^2 h \leq \frac{4}{27} R^2 H = \frac{4}{27} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 12 \Rightarrow V \leq 16\pi$$



二、計算證明題：兩小題，配分寫在各小題後，共10分

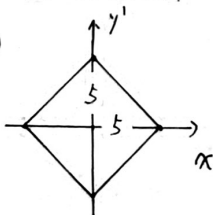
(1) 在坐標平面上，設 $\triangle ABC$ 經二階方阵 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 作線性變換後成 $\triangle A'B'C'$ 。若 $\triangle ABC$ 的面積為 Δ ， $\triangle A'B'C'$ 的面積為 Δ' ，試證明： $\Delta' = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| \cdot \Delta$ 。(6分)

積為 Δ' ，試證明： $\Delta' = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| \cdot \Delta$ 。(6分)

(1) $A'(ax_1+by_1, cx_1+dy_1)$
 $B'(ax_2+by_2, cx_2+dy_2)$

(2) 試求出滿足 $|2x+y-113| + |x+3y-2024| = 5$ 的所有點 (x, y) 所圍成的區域面積。(4分)

(2)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 50 = 5 \cdot A$$

$$\Rightarrow A = 10$$

2/2

$$\begin{vmatrix} ax_1+by_1 & ax_2+by_2 \\ cx_1+dy_1 & cx_2+dy_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax_1+by_1 & ax_2 \\ cx_1+dy_1 & cx_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax_1+by_1 & by_2 \\ cx_1+dy_1 & dy_2 \end{vmatrix}$$

$$= -x_2 y_1 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + x_1 y_2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} |x_1 y_1 - x_2 y_2|$$