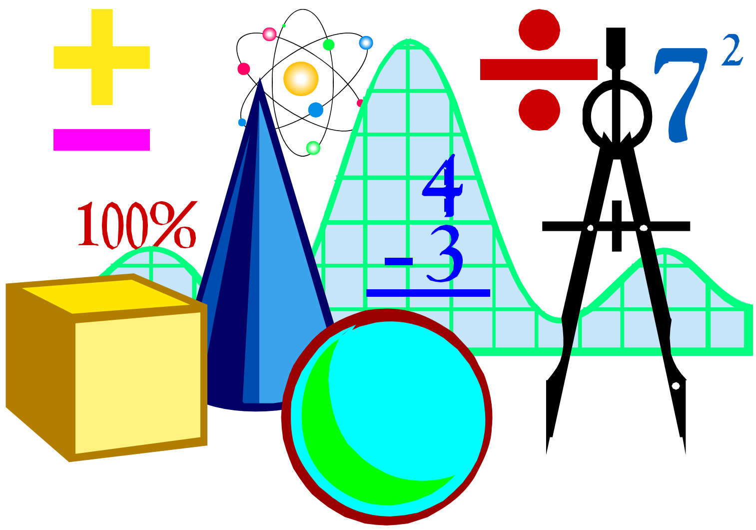
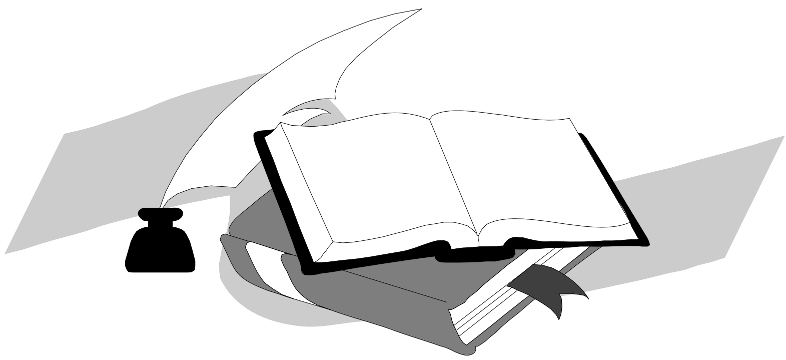
數　學　分　享

面積相關問題



穩固的根基　　圓融的思考　　明確的目標



當我真心在追尋著我的夢想時，每一天都是繽紛的，

因為我知道每一個小時都是在實現夢想的一部分。

數學分享---面積相關問題

✧ 三角形面積公式

小學時，我們從邊長為 1 單位的正方形學得其面積為 1 平方單位，進而對長方形作切割(成數塊正方形)，因此知道長方形的面積為長×寬，再透過分割、合併、移補等方法，就可以順利推導得到三角形、平行四邊形、菱形、梯形…等的面積公式(求多邊形的面積常常將它分割成數個三角形求面積)。在學生時代，我們對三角形的面積公式特別的熟悉，因為它有多樣的算法(多種的公式)，以下公式是我們在學生時代常見的三角形面積公式:

$$\Delta = \frac{1}{2}a\cdot h_a = \frac{1}{2}b\cdot h_b = \frac{1}{2}c\cdot h_c$$

$$= \frac{1}{2}a\cdot c\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A \qquad [\ \Delta\text{表 }\Delta ABC\text{ 面積}]$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad [\ s=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\ ]\ \{\text{海龍公式}\}$$

$$= \frac{abc}{4R} \qquad [\ R=\text{外接圓半徑}\ ]$$

$$= rs \qquad [\ r=\text{內切圓半徑}\ ]$$

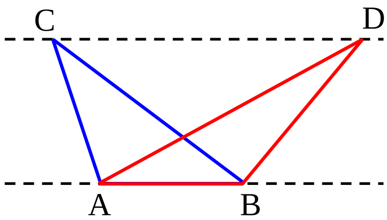
$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| \qquad [\ \overrightarrow{AB}=(b_1,b_2),\ \overrightarrow{AC}=(c_1,c_2)\ ]$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}\right| \qquad [\ A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)\ ]$$

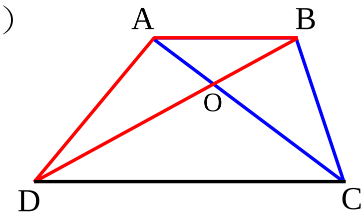
$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right| \qquad [\ A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)\ ]$$

$$= \frac{1}{2}B + I - 1 \qquad [B=\text{三角形周長上的格子點數};\ I=\text{三角形內部上的格子點數}]$$

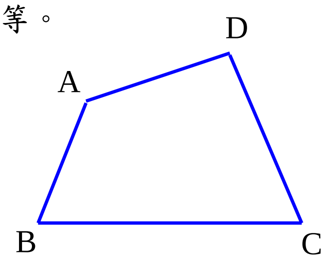
1.1 如右圖，直線 AB 與直線 CD 平行，試比較 ΔABC的面積與ΔABD的面積之大小關係?



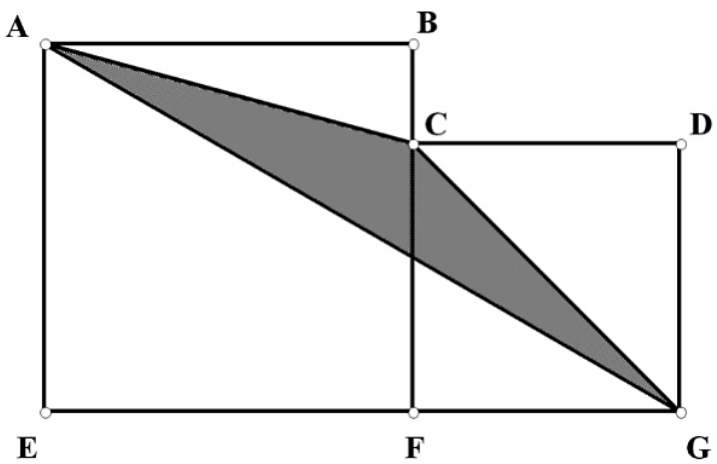
1.2 右圖是一個梯形 ABCD(邊 AB 與邊 CD 平行)，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$交於 O 點，則ΔOAD的面積與ΔOBC的面積之大小關係?



1.3 給一凸四邊形，求作一三角形使其面積相等。



1.4 如下圖，ABFE 和 CDGF 是兩個緊靠在一起的正方形，已知正方形 CDGF 邊長為 8 cm，求圖中陰影部份(即求ΔACG的面積)?



1.4 例題 01. 圍繞一個圓形廣場的周圍畫一個更大的圓，使圓與廣場圓圍的距離為 4m。問：大圓周的周長比廣場的圓周長多少米

✧ Pick 公式

2.1 93 年指考《數學乙》考過如下的面積問題:

當平面上的點 (x, y) 之坐標 x 與 y 都是整數時，稱點 (x, y) 為格子點。數學家知道：坐標平面上三頂點皆為格子點的三角形之面積可以用公式 $aS+bI+c$ 來表示，其中 S 代表三角形三邊邊上個的格子點數，I 是落在三角形內部(不含邊上)的格子點數，a,b,c 是固定的常數。求常數 a，b 與 c 的值。

這是有名的 Pick 公式，只要選定幾個以格子點為頂點的三角形，便能求得公式中的常數 a，b 與 c 的值。

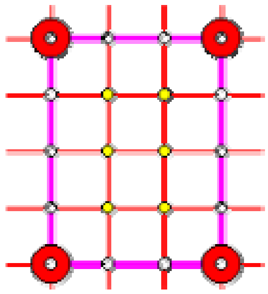
> Pick 公式
>
> 以格子點為頂點的三角形面積可表為 $\frac{1}{2}B+I-1$ 的形式。
>
> 其中，B=三角形周長上的格子點數;
>
> I=三角形內部上的格子點數。

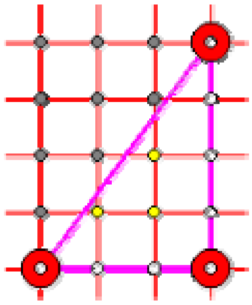
¤Toying With The Geoboard

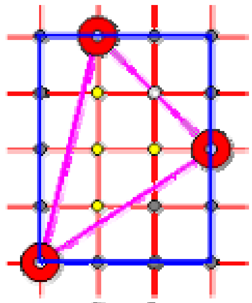
在我們的教學中，常帶領同學在幾何板上玩圍出邊不相交的任意多邊形，這種多邊就是上述以格子點為頂點的多邊形(lattice polygon)，而此多邊形的面積如下:

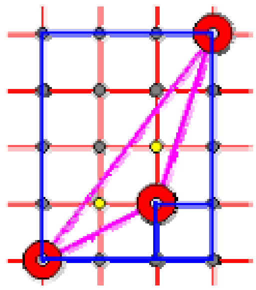
> **Pick 公式**
>
> **格點多邊形的面積可表為** $\frac{1}{2}B+I-1$ **的形式。**
>
> **其中，B=多邊形周長上的格子點數;**
>
> **I=多邊形內部上的格子點數。**
>
> **通常把直角坐標系中具有整數坐標的點稱為格點，頂點為格點的多邊形稱為格點多邊形。**
>
> **［奧地利人 Georg Alexander Pick (1859~1943) 在 1899 年提出］**

實例體驗---


Case 1


Case 2


Case 3a


Case 3b

Case1:

長方形面積$=3\times 4=12$

Pick 公式 $=\frac{1}{2}(14)+(6)-1=12$

Case2:

三角形面積$=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$

Pick 公式 $=\frac{1}{2}(8)+(3)-1=6$

Case3a:

三角形面積$=12-[(\frac{1}{2}\times 1\times 4)+(\frac{1}{2}\times 2\times 2)+(\frac{1}{2}\times 3\times 2)]=5$

Pick 公式 $=\frac{1}{2}(4)+(4)-1=5$

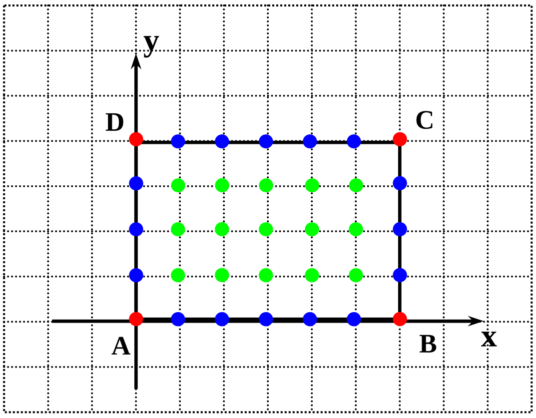
Case3b:

三角形面積$=\frac{1}{2}\times 3\times 4-[(\frac{1}{2}\times 2\times 1)+(1\times 1)+(\frac{1}{2}\times 1\times 3)]=\frac{5}{2}$

Pick 公式 $=\frac{1}{2}(3)+(2)-1=\frac{5}{2}$

預備知識:

<1>**兩邊皆與 x 軸, y 軸平行的矩形**(簡單形的矩形)



[pf]:

將矩形 ABCD 置於直角坐標系上，設 A(0,0),B(m,0),D(0,n) $\Rightarrow$ C(m,n)

邊上的格子點總數為 B=2[(m-1)+(n-1)]+4=2m+2n

內部的格子點總數為 $I=(m-1)(n-1)=mn-m-n+1$

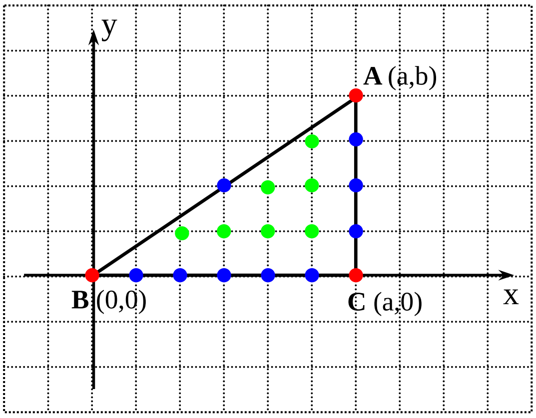
代入 Pick 公式

$$A=\frac{B}{2}+I-1=\frac{(2m+2n)}{2}+(mn-m-n+1)-1=mn$$

此恰為矩形 ABCD 的面積。

<2>**兩邊皆與 x 軸, y 軸平行的三角形**(簡單形的直角三角形)

三角形經平移、鏡射、旋轉後，面積皆不改變，因此兩邊皆與 x 軸, y 軸平行的三角形，我們可以下圖(將 ΔABC 置於直角坐標系上)的型態來探討。



[pf]:

先證　若 ΔABC 中，$\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ 其中 a、b$\in$N 且 gcd(a, b)=d，

則斜邊 $\overline{AB}$ 上不含 A、B 兩點的格子點數目為 d−1 個。

設 B(0,0),C(a,0),A(a,b)，則直線 AB 方程式為 $y=\frac{b}{a}x$，且 $0<x<a$

由 gcd(a, b)=d，可令 $\begin{cases} a=dt \\ b=dk \end{cases}$ 其中 $\gcd(t,k)=1$，代入直線 AB

得　$y=\frac{k}{t}x$，且 $0<x<a$

因為求 $\overline{AB}$ 上的格子點數目，相當於求上式的整數解個數，
所以取 x=t、2t、…、(d-1)t 均可得到整數解，
因此 $\overline{AB}$ 上不含 A、B 兩點的格子點數目共有(d-1)個。

由上面可得 ΔABC

邊上的格子點總數為 B=(d-1)+(a-1)+(b-1)+3=a+b+d

內部的格子點總數為 $I=\frac{(a-1)(b-1)-(d-1)}{2}=\frac{ab-a-b-d}{2}+1$

代入 Pick 公式

$$A=\frac{B}{2}+I-1=\frac{a+b+d}{2}+\frac{ab-a-b-d}{2}+1-1=\frac{ab}{2}$$

此恰為 ΔABC 的面積。

<3>其他類型之三角形

其他類型的三角形均可以適用 Pick 公式，我們可利用以下方式得到:

1. 簡單形的矩形減掉二個簡單形的直角三角形。(見圖 a)
2. 簡單形的矩形減掉三個簡單形的直角三角形。(見圖 b)
3. 簡單形的矩形減掉三個簡單形的直角三角形 (見圖 c)
   再加上一個簡單形的矩形。

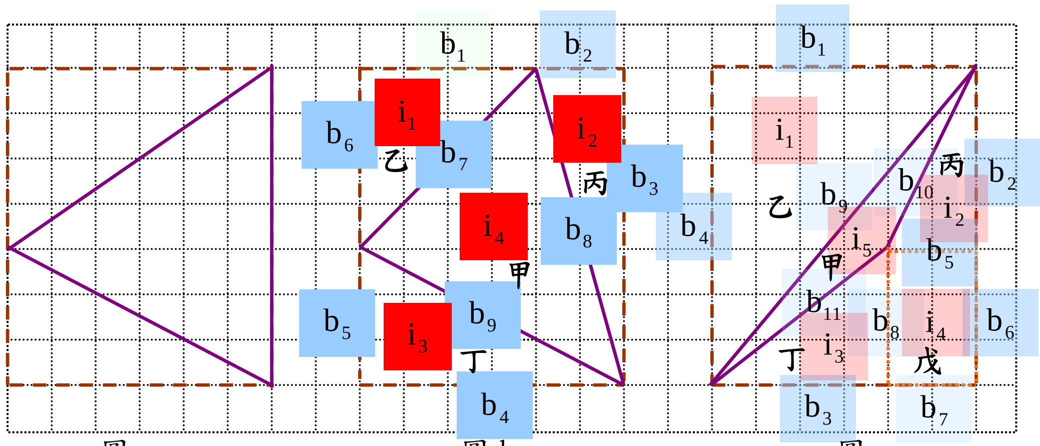


圖 a　　圖 b　　圖 c

<u>圖b說明如下</u>:

首先令 $b_1 \sim b_9$ 為三角形甲, 乙, 丙, 丁各邊上不含兩端點的格子點數目；

$i_1 \sim i_4$ 為三角形甲, 乙, 丙, 丁內部的格子點數目，則

[矩形面積]-(三角形乙的面積)-(三角形丙的面積)-(三角形丁的面積)

$$=[\frac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+6}{2}+(i_1+i_2+i_3+i_4+b_7+b_8+b_9)-1]$$

$$-(\frac{b_1+b_6+b_7+3}{2}+i_1-1)$$

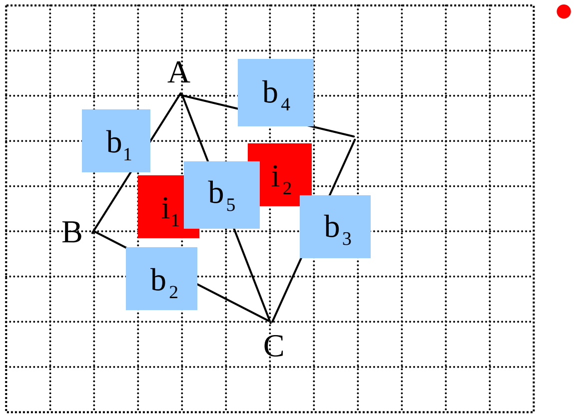
$$-(\frac{b_2+b_3+b_8+3}{2}+i_2-1)$$

$$-(\frac{b_4+b_5+b_9+3}{2}+i_3-1)$$

$$=\frac{b_7+b_8+b_9+3}{2}+i_4-1$$ 恰為三角形甲的面積

<4>Pick 公式在三角形上具有加法性質(additive character)

透過上面的過程，我們可以得知 Pick 公式在三角形上具有加法性質。我們要利用這個性質來說明 Pick 公式適用於所有的凸 n 邊形。首先任意的四邊形可以分割成 2 個三角形(如右圖)，說明仿上:



四邊形 ABCD 的面積=ΔABC 的面積+ΔACD 的面積

$$=\left(\frac{b_1+b_2+b_5+3}{2}+i_1-1\right)+\left(\frac{b_3+b_4+b_5+3}{2}+i_2-1\right)$$

$$=\frac{b_1+b_2+b_3+b_4+4}{2}+(i_1+i_2+b_5)-1$$ 恰為 Pick 公式的型態。

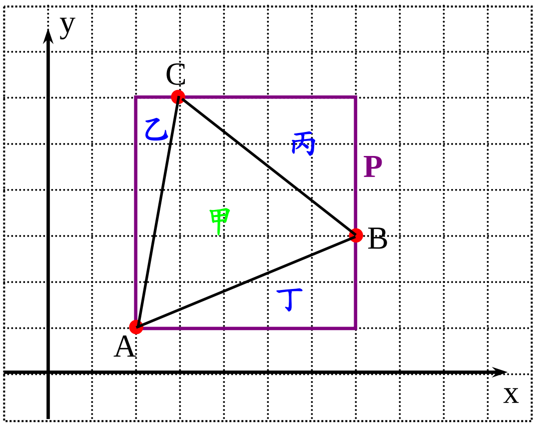
所以 Pick 公式適用於所有的凸四邊形。又因任意凸 n 邊形可以分割成凸 n−1 邊形與一個三角形的組合，再利用數學歸納法，就可以很輕易地證明出 Pick 公式適用於所有的凸 n 邊形。(Pick 公式亦適用於所有的凹多邊形)

2.2 格點正 n 邊形

對於正整數 $n \geq 3$，是否存在格點正 n 邊形?

我們容易看到以任意兩個格點間的長度為邊的格點正方形總是存在的。一個有點超出人們直覺想像的結果是:

定理　除 $n = 4$ 外，不存在格點正 n 邊形。



引理　不存在格點正三角形。

證明　設 ΔABC 是格點正三角形，假設矩形 P 是含 ΔABC 且邊平行於兩坐標軸的格點矩形，此時

ΔABC 的面積 甲

=(矩形 **P** 的面積)-(乙)-(丙)-(丁)

之值為有理數。［實際之值為整數或整數的二分之一，因為矩形 P 的面積為整數，三角形乙、丙、丁的面積皆為二分之一的整數倍(?)］

若　令 ΔABC 的邊長為 $a = \sqrt{m^2 + n^2}$ ，

則　ΔABC 的面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(m^2 + n^2)$ ，其中 m,n 是整數。

因此 ΔABC 的面積是無理數，矛盾。　⌖

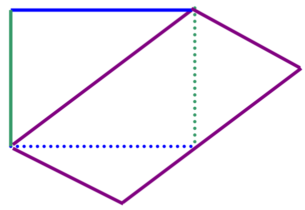
定理證明：假設存在格點正 n 邊形，$n > 4$, $n \neq 6$（令頂點為 $A_1, A_2, \cdots, A_n$）。

以鄰邊 A_iA_{i+1}, $A_{i+1}A_{i+2}$ 為兩邊作平行四邊形(菱形)，令平行四邊形另一個頂點是 B_i ，則 B_i 是格點。因為 $n \neq 6$，故這些點 B_i 互不重合，且 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 形成另一個正 n 邊形。這一個過程可以無限制地進行下去，得到一系列的格點正 n 邊形，但這不可能。

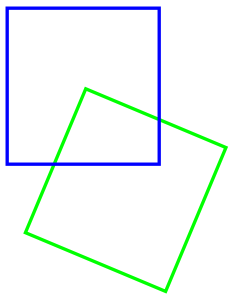
而當 $n = 6$ 時，可用與引理相仿的方法證明不存在格點正六邊形。(?)

✧ 割補

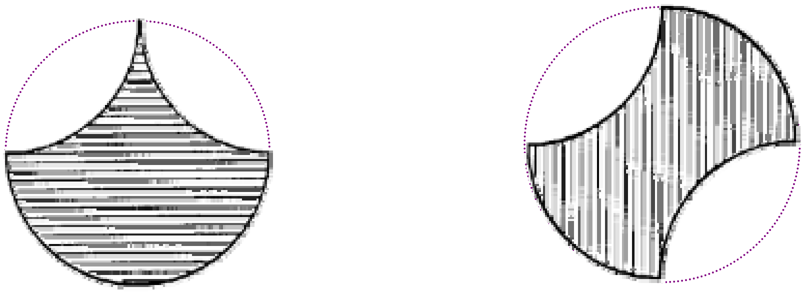
3.1 下圖是長方形和平行四邊形重疊的圖形，其中長方形之長為 8, 寬為 6，試求平行四邊形的面積為何?



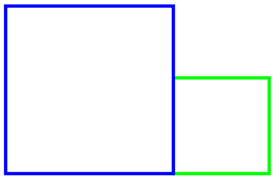
3.2 兩邊長都為 2 的正方形，其中一個的頂點是另一個的中心，求兩正方形重疊部分的面積?



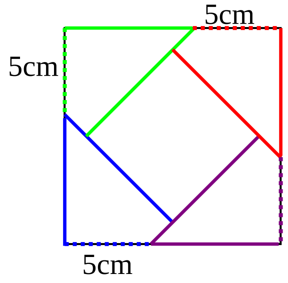
3.3 以下兩個圖形由於都以半徑為 r 圓形部分為周界，若要計算其面積，我們起初總會覺得必然涉及π的數值。試算其面積?



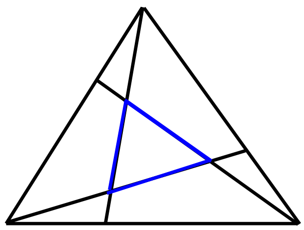
3.4 用割補法來證明勾股定理。



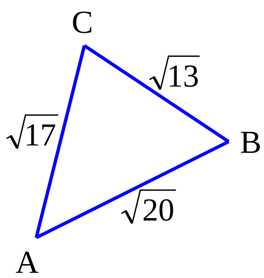
3.5 如圖把正方形的色紙切分成 5 片。從色紙的四邊正好 5 公分的地方，用剪刀剪入 45 度角，讓中央形成一個小正方形。請問這個小正方形的面積有多少呢?



3.6 任意畫一個角形(如右圖)，從三個頂點各畫一條可以將對邊分成 2:1 的點。完成後，內部會形成一個小三角形，如同圖中塗黑部分。請問這個小三角形的面積是原來大三角形的的幾分之幾?



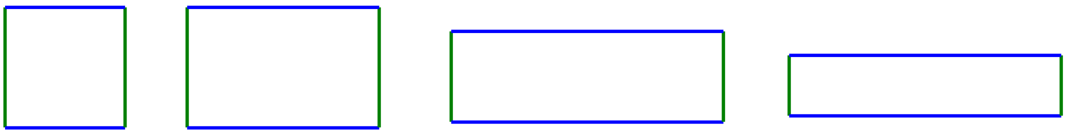
3.7 如圖，ΔABC 中, $\overline{AB}=\sqrt{20}$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$, $\overline{CA}=\sqrt{17}$ ，求 ΔABC 的面積?



✧ 拼圖

4.1➤化矩形為方➤

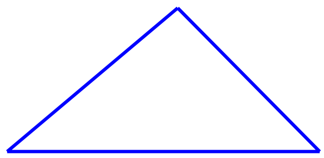
如何將矩形剖分為有限個多邊形，並重拼這些多邊形為一個與此矩形面積相等的正方形？（長 a 寬 b）



$a=b$　　$\frac{a}{2}\le b$　　$b<\frac{a}{2}<2b$　　$\frac{a}{2}\ge 2b$

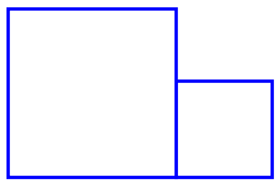
4.2➤化三角形為方➤

如何將三角形剖分為有限個多邊形，並重拼這些多邊形為一個與此矩形面積相等的正方形？

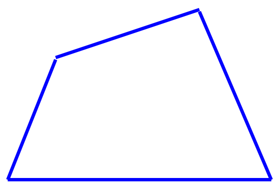


4.3➤化兩正方形為方➤

如何將三角形剖分為有限個多邊形，並重拼這些多邊形為一個與此矩形面積相等的正方形？



4.3➤化凸四邊形為平行四邊形➤



有效的數學學習策略 文/方璞政

在求學過程中，我們常常為了如何有效讀書而傷透腦筋，良好的讀書方法和習慣，有助於增進學習效率，提高學習興趣，相反地，如果方法錯誤方向不對往往會得到相反的效果。由於每個人都有不同的天賦與能力，讀書的習慣與態度也不相同，因此，很難有一套放諸四海而皆準的讀書方法來適合每個人。在實際的方法上，什麼是有效的學習策略，也許見仁見智，對於數學(理科)的學習，個人提出一些淺見，以供大家參考。

1. 瀏覽全部章節:先概略地將章節、標題翻閱一遍，對所有章節的內容有大概的瞭解。數學問題很多的觀念是環環相扣的，知道未來章節的特性，則現階段所學的各個觀念就越能掌握，因為你能較具體地知道目前的單元性質未來用於何處。

2. 注重基本概念:讀數學不是死記一些性質、公式而去套用，各章節主題內容的學習應該注重基本概念，由基本概念自己去推導其性質、公式而學習體會如何引用，這樣子才不用背很多，也才能減輕學習的負擔。同學應該都有下述的經驗:

   階段性的學習，在考試之前，當下記的東西很多也很清楚，但是經過一段時間後，幾乎忘光光了，其實這就是學習的過程中，死背太多而不懂得去蕪存菁的結果。

3. 感受推導過程:上述的「由基本概念自己去推導其性質、公式」要特別注意地方是:在推導的每一個步驟過程中，應該時時停留一下腳步，好好仔細觀察每一處符號的變化及未知數之位置改變的狀況，並綜觀整體的情形，如此一步步的感覺而推導到完成，其後再花一點時間去撫處體認，回想整個流程，這樣子你推導的性質、公式就會很難忘懷了，而且它們會常駐留在你的長期記憶區之中。

4. 熟悉符號定義:數學科目注重理解，但也是有一些基本要熟悉背誦的東西，那就是單元內容的符號概念及基本定義、定理，這就是上述的基本概念。

5. 強化觀念了解:有了前面的準備功夫後，接下來的就是做一些基本觀念題，來熟悉該章節內容的基本概念，後續再做大型或綜合型的題目(如學測、聯考題)，來強化對基本概念的理解，另一方面，大考試題也會有引導學習單元內容的學習方向，讓你更明確地知道學習單元內容的重點所在。而在此過程中也要多多培養思考與反覆回想，如此才能獲得較大的功效。另外，對於數學學習較不能很迅速地舉一反三的學習者，建議你每種基本概念的題目，正向、逆向及綜合性的題目，學習過程中至少都要各演習過一便，這樣子久而久之，你對解題的敏感度自然就會增加了。

別人的讀書方法不一定適合你，同樣地，個人提出以上的淺見，也未必對你一定會有很大的學習效用，但他山之石可以攻錯，希望這些淺見能多多少少，為你啟開對數學的學習有新的觀念、新的方法，以便達到更好的學習成效。

參考文獻

[1] 數學教育 EduMath 第 8 期，第 7 期

[2] 張廣祥，數學中的問題探究，華東師範大學出版社

[3] 許志農，動手玩數學 http://math.ntnu.edu.tw/~maco/play.htm

[4] 科學教育月刊第 287 期(94.4)

[5] Alex Bogomolny: Pick's Theorem http://www.cut-the-knot.org/ctk/Pick.shtml

[6] 中村義，超級謎題，地球出版社

[7] 陳永明，馬曉柏，孫國英，我的數學腦袋，凡異出版社

[8] 許建銘，尊重思考的數學教育，九章出版社