臺北市立永春高級中學 113 學年度數學教師甄試試題 第 1 頁共 2 頁

說明：請用黑色或藍色原子筆書寫

一、 填充題：每題 8 分，共 88 分。分數或根式須以最簡形式回答，否則不予計分。

1. 已知$f(x)=x^3-5x^2+bx+c$，若$f(x)=0$的三根為α,β,γ，且$f(-1)=20$，則

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}$$ 。

2. 設 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}=30$，其中$a$，$b$為正數，求$3\log_{\frac{1}{6}}a+2\log_{\frac{1}{6}}b$的最大值________。

3. 假設A為非空的有限集合，規定$S(A)$表示A中所有元素的和；例如：$S(\{1,3,7\})=1+3+7=11$。考慮集合$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$中的每個非空子集合A，試求所有這樣$S(A)$的總和________。

4. 設 z 為複數，且$|z|=1$，已知$|z^2-z+1|$的最大值為 M，最小值為 m，求 M+m＝ ___________。

5. 113 年永春盃網球排名賽 18 歲組單打賽共 32 名選手參賽，採單淘汰制，每名選手勢均力敵。若進入 16 強可得 3 分的積分，進入 8 強可得 5 分的積分，進入 4 強可得 10 分的積分，進入冠亞軍賽可得 15 分的積分，得冠軍者可得 20 分的積分，試問每位選手拿到的積分之期望值為__________。

6. 若$f(x)$為多項式，且滿足$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$，試求$f(x)$除以$x-3$的餘數＝____________。

7. $x,y\in R$ 使得 $x^3=3x^2-5x$， $y^3=6y^2-10y+7$，試求 $x+y$的值__________。

8. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=3$，過 A 點在直線 BC 上的垂足為 H。若（向量）$\overline{AH}=-\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{3}{2}\overline{AC}$，試求$\triangle ABC$ 的外接圓面積＿＿＿＿＿。

9. 試求$sin^2 50°+sin^2 70°-sin^2 80°$的值＿＿＿＿＿。

10. 空間中有兩條歪斜線 L 與 S，直線 L 上有三點 A、B、C，且 $\overline{AB}=\overline{BC}$。直線 S 上有三點 D、E、F，其中 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 皆垂直 L。已知 $\overline{AD}=10$、$\overline{BE}=13$、$\overline{CF}=24$。試求歪斜線 L、S 的距離＿＿＿＿＿。

11. 設 m 為實數，已知四次方程式$3x^4-4mx^3+1=0$無實根，求 m 的範圍為＿＿＿＿＿。

二、 計算題：共 12 分。須詳細過程，否則酌予扣分。

1. 試求 $\sqrt{10-6\cos\theta}+\frac{1}{4}\sqrt{34-24\sqrt{2}\sin\theta}+\sqrt{19-2\sqrt{2}\cos\theta-8\sin\theta}$ 的最小值。