臺北市立松山高級中學 113 學年度第 2 次正式教師甄選 數學科 初試試題

◎ 請於答案卷上標明題號並作答。填充題請僅須簡答，計算題及證明題須有完整之過程。

一、填充題（每題 5 分，共 50 分）

1. 已知數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=3$，且對任意正整數n均有$a_{n+1}=4+a_n+\sqrt{1+16a_n}$，則數列的一般式$a_n=$？

$4n^2-n$

2. 設$f(x)$為定義在區間$(0,\infty)$上的嚴格遞增函數，且對任意的$x>0$，$f(x)\cdot f(\frac{1}{x}+f(x))=1$均成立，試求$f(1)=$？

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

3. 設矩陣$A=[a_{ij}]_{2\times2}$, $B=[b_{ij}]_{2\times2}$中各元皆為 0 或 1，試問相乘所得AB共有多少種可能？

45

4. 箱中有 5 個紅球、3 個白球，每一個球被取出的機會相等。從箱中一次取出 3 球，試求取出紅球個數的期望值。

$\frac{15}{8}$

5. 設複數z滿足$\frac{z-1}{z+1}$為純虛數，則$|3z^2-z+1|$的最小值為？

$\frac{\sqrt{33}}{3}$

6. 在四邊形$ABCD$中，$\angle ABC=\angle CAD=60°$、$\angle CAB=45°$、$\angle ADC=90°$，又知道$\overline{BC}=2\sqrt{2}$，試求$\overline{BD}$長度平方的值，即$\overline{BD}^2=$？

$11+6\sqrt{3}$

7. 三角錐$A-BCD$中，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{BD}$。若$G$為$\Delta ABC$的重心，且$\overline{DG}=1$，試求三角錐$A-BCD$的體積最大值為？

$\frac{9}{32}$

8. 坐標平面上，橢圓Γ_1: $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 與雙曲線Γ_2: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1$有共同的焦點 (2, 0), (−2, 0)，且橢圓Γ_1的短軸長度和雙曲線Γ_2的貫軸長度相等，試求行列式$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}$的值。

-16

9. 試求極限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$。

$\frac{1}{3}$

10. 設 $y=\sin x$ 的圖形與 x 軸、直線 $x=\frac{\pi}{4}$、直線 $x=\frac{3\pi}{4}$ 所圍成的區域繞 x 軸旋轉所得的旋轉體為 S，試求旋轉體 S 的體積。

$\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}$

Created with Scanner Pro