

臺北市立松山高級中學 113 學年度第 2 次正式教師甄選 數學科 初試試題

◎ 請於答案卷上標明題號並作答。填充題請僅須簡答，計算題及證明題須有完整之過程。

一、填充題（每題 5 分，共 50 分）

1. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 3$ ，且對任意正整數 n 均有 $a_{n+1} = 4 + a_n + \sqrt{1 + 16a_n}$ ，則數列的一般式 $a_n = ?$
2. 設 $f(x)$ 為定義在區間 $(0, \infty)$ 上的嚴格遞增函數，且對任意的 $x > 0$ ， $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x} + f(x)\right) = 1$ 均成立，試求 $f(1) = ?$
3. 設矩陣 $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ 中各元皆為 0 或 1，試問相乘所得 AB 共有多少種可能？
4. 箱中有 5 個紅球、3 個白球，每一個球被取出的機會相等。從箱中一次取出 3 球，試求取出紅球個數的期望值。
5. 設複數 z 滿足 $\frac{z-1}{z+1}$ 為純虛數，則 $|3z^2 - z + 1|$ 的最小值為？
6. 在四邊形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \angle CAD = 60^\circ$ 、 $\angle CAB = 45^\circ$ 、 $\angle ADC = 90^\circ$ ，又知道 $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$ ，試求 \overline{BD} 長度平方的值，即 $\overline{BD}^2 = ?$
7. 三角錐 $A-BCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$ ， $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{BD}$ 。若 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，且 $\overline{DG} = 1$ ，試求三角錐 $A-BCD$ 的體積最大值為？
8. 坐標平面上，橢圓 $\Gamma_1: \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$ 與雙曲線 $\Gamma_2: \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 1$ 有共同的焦點 $(2, 0), (-2, 0)$ ，且橢圓 Γ_1 的短軸長度和雙曲線 Γ_2 的實軸長度相等，試求行列式 $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}$ 的值。
9. 試求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ 。
10. 設 $y = \sin x$ 的圖形與 x 軸、直線 $x = \frac{\pi}{4}$ 、直線 $x = \frac{3\pi}{4}$ 所圍成的區域繞 x 軸旋轉所得的旋轉體為 S ，試求旋轉體 S 的體積。

臺北市立松山高級中學 113 學年度第 2 次正式教師甄選 數學科 初試試題(參考答案)

一、填充題 (每題 5 分, 共 50 分)

題號	答案	題號	答案
1	$4n^2 - n$	6	$11 + 6\sqrt{3}$
2	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	7	$\frac{9}{32}$
3	45	8	-16
4	$\frac{15}{8}$	9	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{\sqrt{33}}{3}$	10	$\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}$