新北市立板橋高級中學 113 學年度 第二次教師甄選【數學科】試題卷	准考證號	

一、 填充題(每題 5 分，12 題，共 60 分)

1. 設a,b為正整數，且$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2032}$，則$(a,b)$有__________組正整數解。

2. 設 $\log(x+2y)+\log(x-2y)=2$，則 $x-y$ 的最小值為________。

3. 半徑為 1 的圓上有 10 個等分點 A_1、A_2、…、A_{10}，則 $\sum_{i=2}^{9}(\overrightarrow{A_1A_i}\cdot\overrightarrow{A_1A_{i+1}})=$__________。

4. $\sum_{n=1}^{m}\dfrac{1}{\sin\dfrac{1024\pi}{2^n\times 3}}>4$，則正整數 m 的最小值為________。

5. 已知 x 和 y 均為正數，且$\begin{cases} x^2y\le 10000 \\ xy^4\ge 1000 \\ x^5y\ge 100000 \end{cases}$，則 $\dfrac{x}{y}$ 的最大值為________。

6. 設 A 為二階方陣，I 為二階單位方陣，A^T 為 A 的轉置矩陣。已知 $A^TA=AA^T=I$ 且 $\det A>0$，$A\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$，則矩陣 A 可將直線 $x+y=7$ 對應到的圖形方程式為__________。

7. 在空間坐標系中，已知 $\overline{AB}$ 的中點為 $(2,3,4)$，且 $\overline{AB}=10$，若動點 P 滿足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=1$，且 P 點到直線 $L:\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y-9}{1}=\dfrac{z-10}{-2}$ 的最短距離為________。

8. 袋中有 3 顆黑球、5 顆白球和 7 顆紅球，一次取一球，每球被取中的機會均等，取後不放回，若紅球最先被取完的條件下，黑球最後被取完的機率為________。

9. 複數$z=a+bi$，其中$a,b\in\mathbb{R}$，滿足$|z^2+z+2|=2$，求 b 的最大值為__________。

10. 方程式$x=\sqrt{x^2-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ 的解為$x=$__________。

11. 在四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{34},\ \overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{29},\ \overline{AD}=\overline{BC}=\sqrt{13}$，則 $ABCD$ 的外接球表面積為__________。

12. 設 A 是由任意 50 個相異正整數組成的合。令$B=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\,a,b\in A\text{且}a\neq b\right\}$。$|B|$表示集合 B 中的元素個數，則$|B|$的最大值與最小值分別為 M,m，則 $M+m=$__________。

二、計算證明題（每題 10 分，4 題，共 40 分）

1. $f(x), g(x)$為三次實係數多項式，證明：1,2,3,5,6,7,9,10,11 不可能均為方程式$f\big(g(x)\big)=0$的解。

2. 設數列$\langle a_n\rangle$和$\langle b_n\rangle$滿足$a_{n+1}=2a_n\times b_n$，$b_{n+1}=4a_n^2+b_n^2$，且$a_1=7$，$b_1=3$。試證：數列$\left\langle \dfrac{b_n}{a_n}\right\rangle$是收斂數列，並求其極限值。

3. 在坐標空間中，O 為原點，已知曲面$\sqrt{(x+y-3)^2+z^2}=6-2y$的圖形為一錐體的表面，且此錐體與 xy 平面、yz 平面、xz 平面在第一卦限所圍成的封閉立體圖形（含表面）為Ω。試以下列步驟求出Ω的體積：

(1)先在Ω內找出一線段並分割成 n 等分，設分點依序為$P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}, P_n$，考慮以通過點$P_k$且垂直$\overline{P_0P_n}$的平面$E_k$，以平面$E_k$與$\Omega$所截的區域為底面，$\overline{P_kP_{k+1}}$為高所形成的立體圖形為$\Omega$的一個切片。請利用此切片方法寫下估計$\Omega$體積的黎曼和（不需化簡）。(5 分)

(2)承(1)，以定積分形式表示Ω的體積並求其值。 (5 分)

4. 設$\overline{AB}$為半圓 O 的直徑，C 為半圓 O 上一點，$\overline{CD}$垂直$\overline{AB}$於 D 點，且知圓 P 分別與$\overline{DB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overline{CD}$相切於 E, F, G 三點(如下圖)及圓 Q 分別與$\overline{AD}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overline{CD}$ 相切於 H, I, J。

(1) 試證$\overline{AC}=\overline{AE}$。(5 分)

(2) 設ΔABC 的內切圓半行為 r，圓 P、圓 Q 的半徑分別為r_1, r_2，證明：$r=\frac{r_1+r_2}{2}$。(5 分)