113 師大附中

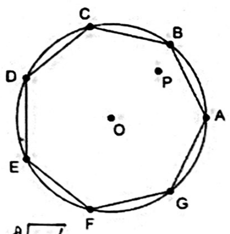
$\frac{7}{72}$ K. 若 $a_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{4n^2}{(2n+5k)^3}$，$n\in\mathbb{N}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{㉒}{㉓㉔}$。

$\boxed{K}$ $\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(2n)^3}{(2n+5k)^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\left(1+\frac{5}{2}\left(\frac{k}{n}\right)\right)^3}\to\frac{1}{2}\int_0^2\left(1+\frac{5}{2}x\right)^{-3}dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{5}{2}x\right)^{-2}\left(\frac{2}{5}\right)\Big|_0^2$

$=-\frac{1}{2\times5}\left(\frac{1}{36}-1\right)=\frac{7}{72}$

L. 如圖，在坐標平面上有一個半徑為 2 的圓，其圓心 $O$ 為原點，且正七邊形 $ABCDEFG$

$8\sqrt{226}$ 內接於此圓。若 $A(2,0)$、$P(1,1)$，則 $\overline{PA}\times\overline{PB}\times\overline{PC}\times\overline{PD}\times\overline{PE}\times\overline{PF}\times\overline{PG}=㉕\sqrt{㉖㉗㉘}$。




$\boxed{L}$ $x^7=2^7e^{i(2k\pi)}$　　$|x^7-2^7|=|(x-2)(x-w)\cdots(x-w^6)|$

令 $w=2e^{i(\frac{2\pi}{7})}$

$1+i=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$　　$(1+i)^7=8\sqrt{2}e^{i(\frac{7}{4}\pi)}=8-8i$

$|8-8i-2^7|$

$=\sqrt{120^2+64}=\sqrt{14464}=8\sqrt{226}$

$\frac{16\sqrt{2}}{3}$ M. 若正四面體其中兩條對稜分別落在直線 $L_1:\begin{cases}x=1+3t\\y=2+6t\\z=\sqrt{3}-5\sqrt{3}t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$ 與直線 $L_2:\begin{cases}x+2y=0\\z=0\end{cases}$ 上，則此正四面體的體積為 $\frac{㉙㉚\sqrt{㉛}}{㉜}$ 立方單位

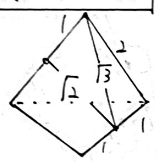
$\boxed{M}$

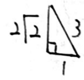
$\begin{matrix}2&-1&0&2&-1&0\\3&6&-5\sqrt{3}&3&6&-5\sqrt{3}\end{matrix}$

$5\sqrt{3}\quad10\sqrt{3}\quad15$

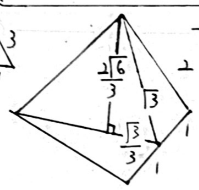
$\begin{matrix}1&2&0&1&2&0\\0&0&1&0&0&1\end{matrix}$　　$\vec{n}=(1,2,\sqrt{3})$

$\vec{v_2}=(2,-1,0)$　$\Rightarrow E_2: x+2y+\sqrt{3}z=0\Rightarrow d(L_1,L_2)=\frac{8}{\sqrt{8}}=2\sqrt{2}$




$a=2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=4$




$\to V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot4\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^3$

$=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot4\cdot4\cdot4=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

N. 持續投擲一顆公正的骰子觀察其點數，直到點數 1、2、3、4、5、6 都至少出現 1 次時，則立即停止投擲。設隨機

14.7 變數 $X$ 為投擲的總次數，試求 $X$ 的期望值 $E(X)=㉝㉞.㉟$。

N. 令 $X_i\equiv$ 投出#i種未表所需的試行次數

$X_i\to Geo\left(p=\frac{6+1-i}{6}\right)$，$X_1\to Geo\left(p=\frac{6}{6}\right)$

$X_2\to Geo\left(p=\frac{5}{6}\right)$

$\vdots$

$X_6\to Geo\left(p=\frac{1}{6}\right)$

$Y=X_1+\cdots+X_6$

$E(Y)=E(X_1+\cdots+X_6)$

$=\frac{6}{6}+\frac{6}{5}+\frac{6}{4}+\frac{6}{3}+\frac{6}{2}+\frac{6}{1}$

$=12+\frac{12+15}{10}=14.7$

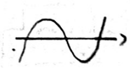
O. 設常數 $k$ 為整數，在坐標平面上函數圖形 $\Gamma_1: y=\frac{2}{9}x^3+x^2-\frac{2}{3}x+2k+1$ 與 $\Gamma_2: y=x^2+2x-4k-5$ 恰相交於相異三

16 點，則圖形 $\Gamma_1$ 與 $\Gamma_2$ 所圍成的封閉區域之面積為㊱㊲。

$(\Gamma_1-\Gamma_2)\xrightarrow{\times9}2x^3-24x+54k+54\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}$ 令 $f(x)=x^3-12x+27k+27$

$f'(x)=3(x^2-4)=0\Rightarrow x=\pm2$，$f(2)f(-2)=(8-24+27k+27)(-8+24+27k+27)<0$

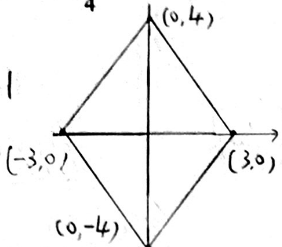
$\Rightarrow -\frac{43}{27}<k<-\frac{11}{27}\Rightarrow k=-1\Rightarrow f(x)=x(x^2-12)=0\Rightarrow x=0,\pm2\sqrt{3}$



$\int_0^{2\sqrt{3}}(x^3-12x)\,dx=\left(\frac{1}{4}x^4-6x^2\right)\Big|_0^{2\sqrt{3}}=3\cdot12-6\cdot12\Rightarrow A=36\cdot2\cdot\frac{2}{9}=16$

12 P. 試求 $\frac{|19x+13y|}{3}+\frac{|25x+17y|}{4}=1$ 的圖形內部面積為 ㊳㊴。

$$\frac{|x'|}{3}+\frac{|y'|}{4}=1$$




$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&13\\25&17\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$24=\left\|\begin{matrix}19&13\\25&17\end{matrix}\right\|\cdot A=|323-325|A\Rightarrow A=12$$

$15\sqrt{3}$ Q. 已知橢圓 $\Gamma_1$ 與雙曲線 $\Gamma_2$ 共焦點 $B(-6,0)$ 與 $C(4,0)$，又直線 $L$：$x+2y=19$ 與 $\Gamma_1$ 相切，且 $D(-6,\frac{9}{4})$ 在雙曲線 $\Gamma_2$ 上。若點 $A$ 為 $\Gamma_1$ 與 $\Gamma_2$ 的其中一個交點，則 $\triangle ABC$ 的面積為 ㊵㊶√㊷。

$\boxed{Q}$ $\boxed{\Gamma_1}$

$d(F_1,L)\,d(F_2,L)=b^2$

$\Rightarrow b^2=\frac{25\times 15}{5}=75$

$c^2=25\Rightarrow a^2=100$

$\boxed{\Gamma_2}$ 設 $\frac{(x+1)^2}{A}-\frac{y^2}{25-A}=1$

$\Rightarrow (25-A)\cdot 25-A\cdot\frac{81}{16}=25A-A^2$

$\Rightarrow 16A^2-881A+625\times 16=0$

$16 \quad -625$

$1 \quad -16$

$\Rightarrow a^2=16$

or $\frac{625}{16}$, $a=\frac{25}{4}>5=c$ 不合

$$\Rightarrow\begin{cases}\Gamma_1:\ \frac{(x+1)^2}{100}+\frac{y^2}{75}=1\\ \Gamma_2:\ \frac{(x+1)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$$

$\Rightarrow y^2\left(\frac{1}{75\cdot 4}+\frac{1}{9\cdot 25}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{25}$

$\Rightarrow y^2\cdot\frac{3+4}{25\cdot 3\cdot 4\cdot 3}=\frac{21}{100}$

$\Rightarrow y=\pm 3\sqrt{3}$, $\triangle=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 3\sqrt{3}=15\sqrt{3}$

$\frac{1+2\sqrt{13}}{3}$ R. 已知實數 $x,y$ 滿足 $x^2+xy+y^2=1$，求 $x^2-3xy-2y^2$ 的最大值為 $\frac{㊸+㊹\sqrt{㊺㊻}}{㊼}$。

$\boxed{R}$ $\cot(2\theta)=\frac{a-c}{b}=0\Rightarrow\theta=45^\circ$

$x+iy=(x'+iy')\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')\end{cases}\qquad\begin{cases}A+C=a+c=2\\ A-C=\sqrt{b^2+(a-c)^2}=1\end{cases}$$

$\Rightarrow A=\frac{3}{2},\ C=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{x'^2}{\frac{2}{3}}+\frac{y'^2}{2}=1$

令 $x'=\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta$

$y'=\sqrt{2}\sin\theta$

$\frac{1}{2}(x'^2+y'^2-2x'y')-\frac{3}{2}(x'^2-y'^2)-\frac{2}{2}(x'^2+2x'y'+y'^2)$

$=-2x'^2-3x'y'+y'^2$

$=-2\cdot\frac{2}{3}\cos^2\theta-\sqrt{3}\cdot 2\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta$

$\Longrightarrow \frac{-2}{3}(1+C)-\sqrt{3}S+1-C=\frac{-5}{3}C-\sqrt{3}S+\frac{1}{3}\le\frac{4\sqrt{13}+1}{3}$

$\boxed{\frac{25}{9}+3=\frac{52}{9}}$

二、非選題：(共 10 分。請用黑色或藍色原子筆寫在作答卷上，須詳細過程，否則酌予扣分)

1. 教學中常使用不同方法解題，一題多解能夠培養學生多面向切入問題與選擇適當的解題方式。下題是教學中常見的例題，請利用不同的方法找出其解。(需列出解題過程、方法愈多愈好)

| |
|---|
| 請求出空間中一點 $P(-5,0,-8)$ 到直線 $L:\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$ 的距離。 |