臺北市立華江高級中學113學年度

正式教師甄選 數學科 初試筆試題目卷

※試題說明:

1.本試題採雙面印刷，共兩頁。

2.請依照題號順序將過程寫在答案卷上，並將最後答案標示清楚，無過程不予計分。

一、計算題: (每題7分, 共91分)

1. $\Gamma:\dfrac{(x-3)^2}{8}-\dfrac{(y-2)^2}{8}=1$以$(3,2)$為中心逆時針旋轉$45°$得到$\Gamma_1$，試問$\Gamma_1$的焦點坐標為_________。

2. 在坐標空間中, 區域$\Omega=\{(x,y,z)\mid x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x+2y+3z\le 36, x,y,z$為實數$\}$, 則$\Omega$中(含邊界)有_______ 個格子點(即$x,y,z$坐標皆為整數的點)。

3. 在坐標平面上, $ABCD$為一平行四邊形, 若它的兩條對角線互相垂直且內積$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=6\left|\overrightarrow{AC}\right|$,

   則$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=$___________。

4. 已知$f(t)=\int_{2024}^{e^{3t}+113t^2+9t}(t^{2024}+t^{2023}+t^2+1)^3dt$，試求$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}$為___________。

5. 坐標平面上,實係數函數$f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-6x^2+6x+k$在$[-3,5]$的範圍中,所有的切線斜率之最小值為_________。

6. 若函數$y=|x-1|-|x-2|+2|x-3|-|x-4|$和直線$y=k$有三個交點，且此兩圖形所圍成面積為$m$，試求$m+k$為__________。

7. 已知$\alpha+\beta+\gamma=3$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$，$\alpha\beta\gamma=-10$，試求 $\alpha^7+\beta^7+\gamma^7=$ ___。

8. 複數$z=a+bi$、$a,b>0,|z|=1$，已知$Arg(\dfrac{z+i}{z})=Arg(\dfrac{z}{z+1})=\theta$，試求$|z+i||z+1|\sin 2\theta$為_______。

9. 設三次實係數多項式$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$滿足$\dfrac{f(1)}{10}=\dfrac{f(3)}{5}=\dfrac{f(4)}{4}$，且$f(4)=2400$，

   求 $f(0)+2f(2)+f(5)=$ ____

10. 已知$a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3,d_1,d_2,d_3$皆為實數，且下方為三元一次聯立方程式及其解

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}, x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=1, y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=2, z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=3\text{；}$$

試求$\begin{cases} (a_1+c_1)x+(b_1+2d_1)y+(c_1+3b_1)z=d_1 \\ (a_2+c_2)x+(b_2+2d_2)y+(c_2+3b_2)z=d_2 \\ (a_3+c_3)x+(b_3+2d_3)y+(c_3+3b_3)z=d_3 \end{cases}$之解$(x,y,z)$為________。

11. 設a、b、c均為小於1的正數，且$a+b=1$。m、n為非負整數。

x及y為自然數且滿足條件: $\log_{10}x=n+a$; $\log_{10}y=m+b$; $\log_{10}(x^2y)=2+c$,

則數對$(x,y)=$____________。(有三解)

12. 平面上,有一個圓,其圓心為O點,半徑為25。此圓上有兩條弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$, $\overline{AB}$=30、$\overline{CD}$=14,

此兩弦交於T點,且此兩弦中點的連線段長度為12。設$\overline{OT}^2=\dfrac{b}{a}$, 其中$a,b$是互質的正整數,

則$\dfrac{b}{a}=$__________。

13. 在坐標平面上,設O為原點, $\overrightarrow{u}=(0,2)$, $\overrightarrow{v}=(\sqrt{3},1)$,

$$\Gamma_1=\left\{P\middle|\overrightarrow{OP}=(r\sin 2\theta, r\cos 2\theta),\ 0\le r\le 3,\ \frac{\pi}{12}\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$\Gamma_2=\left\{Q\middle|\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}, 0\le x\le 2, 0\le y\le 2024\right\}$$

則Γ_1與Γ_2的差集$\Gamma_1-\Gamma_2$所形成的區域之面積= _______________。

二、證明題 :(每題 9 分)

試證明在三角形ABC中,求$\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$的最大值為$\dfrac{1}{8}$。