

准考證號碼：↵

姓名：↵

(配分: 1~11 題 每題 8 分, 第 12 題 12 分.)

1. 求值:  $100C_0^{100} + 99C_1^{100} + 98C_2^{100} + \cdots + 2C_{98}^{100} + C_{99}^{100}$ 。

2. 證明: 在任意 7 個實數中必能找到兩個數  $x, y$  滿足  $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

3. 小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：

(甲) 每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次

(乙) 連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食

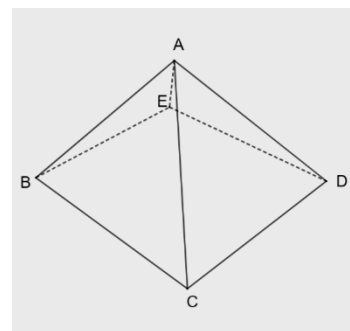
根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？

4. 有一個金字塔，如右圖，其中底面是正方形，

四個側面是等腰三角形( $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AE}$ )，

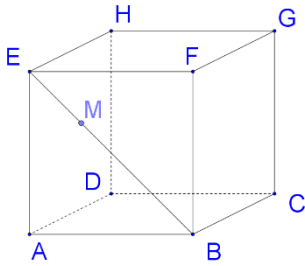
設金字塔的側面與底面之夾角為  $\theta$ ，且  $\tan \theta = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ ，

又側面與側面的夾角為  $\alpha$ ，求  $\cos \alpha = ?$  (以  $a$  表示)



5. 設  $a_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{k^2}{3n^3 + k^3}$ ,  $n \in N$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

6. 如圖,邊長為 1 的正方體  $ABCD-EFGH$ ,  $M$  點為對角線  $BE$  上一點,則  $\overline{AM} + \overline{MH}$  最小值為 ?



7.  $I$  為  $\triangle ABC$  內心,  $D$  在  $\overline{AB}$  邊上,  $E$  在  $\overline{AC}$  邊上, 且  $D-I-E$  三點共線, 已知  $\overline{AD} = \overline{DE} = 5$ ,  $\overline{AE} = 6$ , 則  $\overline{AI} = ?$

8. 在  $\triangle ABC$  中,  $\overline{AB} = 10$ ,  $\overline{AC} = 9$ ,  $\cos \angle BAC = \frac{3}{8}$ . 設點  $P$ 、 $Q$  分別在邊  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  上使得  $\triangle APQ$  之面積為  $\triangle ABC$  面積之一半, 則  $\overline{PQ}$  之最小可能值為?

9. 已知正數  $a$ ,  $b$ ,  $c$  滿足  $a+b+c=1$ , 試求  $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$  之最小值

10. 設數列  $\langle a_n \rangle$  ,  $\langle b_n \rangle$  滿足  $a_0 + b_0 = 2$  , 且對每一正整數  $n$  , 恆有  $a_n = \sqrt{3}a_{n-1} - b_{n-1}$  ,  
 $b_n = a_{n-1} + \sqrt{3}b_{n-1}$  , 則  $a_{18} + b_{18} = ?$

11. 坐標平面上 , 在以  $O(0,0), A(0,1), B(1,1), C(1,0)$  為頂點的正方形 (含邊界) 內 ,  
 令  $R$  為滿足下述條件的點  $P(x, y)$  所成區域 :  
 與點  $P(x, y)$  的距離為  $|x - y|$  之所有點所成圖形完全落在正方形  $OABC$  (含邊界) 內。  
 則區域  $R$  的面積為何 ?

12. 如右圖 , 一個球在任一點每一秒向鄰近點移動或不動的機率都相等

(即在 A 點時向 B , D , E 或留在 A 的機率都是  $\frac{1}{4}$ ) , 現在先把球放在 E 點

(1) 經過 2 秒 , 求仍然留在 E 的機率為何 ?

(2) 設  $f(n)$  表示經過  $n$  秒後球仍然留在 E 點的機率 , 若  $f(n+1) = xf(n) + y$  , 其中  $x$  ,  $y$  為定數與  $n$  無關 , 試求數對  $(x, y)$  .

