

臺北市立大直高級中學 113 學年度第一次專任教師甄選 數學 科甄試試題

一、填充題 (48 分)

1. 已知 a, b, c 為相異之正整數，且滿足 $abc = 2310$ ，則集合 $\{a, b, c\}$ 共有 _____ 種可能。
2. 若有一正數數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$ ，其中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，且 $\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = a_n$ ($n \geq 2$)，求 $S_{20} - S_{19} + S_{18} =$ _____。
3. 若 $a_n = \begin{vmatrix} n & n+1 & 0 \\ n+2 & n+1 & n+2 \\ n+2 & 0 & n+2 \end{vmatrix}$ ， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} =$ _____。
4. 在 $\triangle OAB$ 中， C 為 \overline{OA} 的中點， D 在 \overline{BC} 上且 $\overline{BD} : \overline{DC} = 4 : 3$ 。現延長 \overline{OD} 交 \overline{AB} 於 E ，延長 \overline{AD} 交 \overline{OB} 於 F ，若 $\triangle CEF$ 面積為 m ， $\triangle OAB$ 面積為 M ，則 $\frac{m}{M}$ 為 _____。
5. 若 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ，且 $(a_k + b_k i)^3 = -8i$ ，其中 $k = 1, 2, 3$ ，則 $\sum_{k=1}^3 |a_k + b_k i| =$ _____。
6. 若 $ABCD$ 為一給定的矩形，長 $\overline{AB} = 20$ 、寬 $\overline{BC} = 5$ 。若過 A 點作一直線交 \overline{CD} 於 P ，且與 \overline{BC} 邊的延長線交於 Q ，則當 \overline{CP} 長度為 _____ 時， $\triangle ADP$ 與 $\triangle CPQ$ 之面積和為最小。
7. 設橢圓 Γ 之方程式為 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ，兩焦點為 $F_1(0, c)$ 及 $F_2(0, -c)$ ，其中 $c > 0$ 。設 R 為 Γ 內部而被兩正焦弦所夾之區域。將 R 繞 Γ 的長軸旋轉一周，而形成一酒桶狀立體區域 V ，則體積 V 之值為 _____。
8. 空間中有 $A(-1, 3, 2)$ ， $B(3, 3, 4)$ 兩點，過 A, B 兩點且球心在平面 $E: 5x - 2y + 5z - 5 = 0$ 上之球面有無限多個，則其中半徑最小之球面 S 的方程式為 _____。

二、非選題 (52 分)

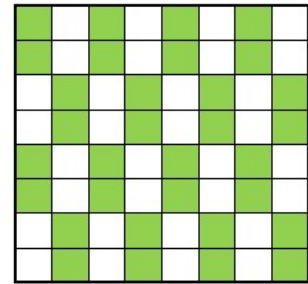
1. 已知有三正數 x, y, z 滿足 $x > z$ 且 $y > z$ ，試證明 $\sqrt{z(x-z)} + \sqrt{z(y-z)} \leq \sqrt{xy}$
(13 分)

2. 在坐標空間中， xz 平面上有一直線 $L: \sqrt{3}x - z - 6 = 0$ ，將此直線繞 z 軸旋轉得到一個直圓錐面，此圓錐面和 xy 平面圍成一個圓錐體。現將一球塞進此圓錐體中，則此球面半徑最大時的球心坐標為_____。

(13 分)

3. 右圖為一個 8×8 的黑白色棋盤，現欲將此棋盤分割成 n 個矩形，規定不能破壞棋盤上的任何一格，並且須滿足下述二個條件：

- (1) 每一個矩形中白格與黑格的個數相等；
- (2) 若 a_i 為第 i 個矩形的面積，則 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$



試問滿足上述分割的最大可能 n 值為何？並且畫出此 n 值的所有分割。

(13 分)

4. 如果現在欲指導學生進行數學專題研究，請以上題(第 3 題)為題材延伸，試擬定這份專題的研究題目，並撰寫研究目的、研究步驟，及簡要研究過程，以及說明您如何指導學生進行專題研究。

(13 分)

填充題解答：

1. (Ans. 40)

2. (Ans. 363)

3. (Ans. $\frac{1}{4}$)

4. (Ans. $\frac{6}{25}$)

5. (Ans. $2+2\sqrt{3}$)

6. (Ans. $20-\sqrt{200}$)

7. (Ans. $\frac{1416\pi}{25}$)

8. (Ans. $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=14$)

非選題解答：

1. Ans. 略 (證明題無法提供標準答案)

2. Ans. (0,0,-2)

3. Ans.

(1) n=7

(2) (2,4,6,10,12,14,16)、(2,4,6,8,12,14,18)、(2,4,6,8,10,16,18)、(2,4,6,8,10,14,20)