113 南女

2024.4.27(六) 星巴克 Ru

二、計算證明題：(每題 10 分，共 50 分)

1.設 n 為正整數，且 $n\ge 2$，又多項式 $f(x)=3x^n+2x^{n-1}-5$ 被 x^2-5x+6 除之，得餘式為 p_nx+q_n，則 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p_n}{6^n}$ 之值為何？ $\frac{7}{6}$

$f(3)=3p_n+q_n=\frac{11}{3}\cdot 3^n-5$

$f(2)=2p_n+q_n=4\cdot 2^n-5$

$\Rightarrow \frac{p_n}{6^n}=\frac{11}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-4\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\Rightarrow \frac{\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{4\cdot\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{11}{6}-\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$

2. 已知 ΔABC 的三邊長滿足 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3\overline{AB}^2$，則 $\sin C$ 的最大值為何？ $\sqrt{5}/3$

$a^2+b^2=3c^2$

$\Rightarrow \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\ge\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \sin C\le\frac{\sqrt{5}}{3}$

3. 已知 x、y 為實數，且滿足 $\begin{cases}x+y=2\\x^4+y^4=1234\end{cases}$，試求 xy 之值。 -21

$(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=1234$

$\Rightarrow (4-2xy)^2-2(xy)^2=1234$

令 $t=xy$ $\Rightarrow 2t^2-16t=1218$

$\Rightarrow t^2-8t-609=0$

$t \quad -29$
$t \quad +21$

$\Rightarrow x=-21$

$2xy=4-(x^2+y^2)\le 4$

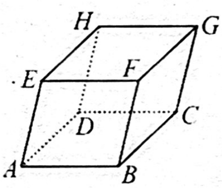
$V=\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{FG}\\\overrightarrow{FB}\\\overrightarrow{FE}\end{vmatrix}\right|$

$=3\cdot 2\left|\begin{vmatrix}2&1&2\\2&2&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}\right|=6\cdot\left|\begin{vmatrix}2&1&2\\0&1&-3\\0&-2&-1\end{vmatrix}\right|$

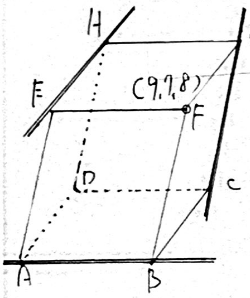
$=6\cdot 14$

$=84$

4.右圖為平行六面體 $ABCD-EFGH$，已知 $\overleftrightarrow{AB}:\frac{x+3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$，$\overleftrightarrow{EH}:\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-1}{1}$，$\overleftrightarrow{CG}:\frac{x-7}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-13}{-1}$。若不在上述三條直線上的點 $(9,7,8)$ 是此平行六面體之其中一頂點，則此平行六面體的體積為何？ 84



yy math



$E(2t+9,t+7,2t+8)$

$\overleftrightarrow{EH}:\frac{\square-1}{2}=\frac{\bigcirc-5}{-1}=\frac{\triangle-1}{1}$

$\Rightarrow t+4=-t-2$

$\Rightarrow t=-3\Rightarrow\overrightarrow{FE}=(-6,-3,-6)$

$G(2t+9,-t+7,t+8)$

$\overleftrightarrow{CG}:\frac{\square-7}{2}=\frac{\bigcirc+1}{2}=\frac{\triangle-13}{-1}$

$\Rightarrow t+1=-t+5$

$\Rightarrow t=2\Rightarrow\overrightarrow{FG}=(4,-2,2)$

$B(2t+9,2t+7,-t+8)$

$\overleftrightarrow{AB}:\frac{\square+3}{2}=\frac{\bigcirc}{1}=\frac{\triangle+1}{2}$

$\Rightarrow t+6=2t+7$

$\Rightarrow t=-1\Rightarrow\overrightarrow{FB}=(-2,-2,1)$

5.已知 ΔABC 滿足 $\sin A=\cos B=\frac{16}{21}\tan C$，且 $\overline{AC}=1$，試求 ΔABC 的面積。 $\frac{7\sqrt{2}}{9}$

$64+98=162=2\cdot 81=2\cdot 9^2$

$\angle A,\angle B\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \angle A=\frac{\pi}{2}-\angle B\Rightarrow\angle C=\frac{\pi}{2}$，不合

$\Rightarrow \pi-\angle A=\frac{\pi}{2}-\angle B$

$\Rightarrow \angle A=\angle B+\frac{\pi}{2}$

$\angle C=\frac{\pi}{2}-2\angle B$

$21\cos B=\frac{16}{\tan 2B}=\frac{16(2\cos^2 B-1)}{2\sin B\cos B}$ $\quad 1-s^2$

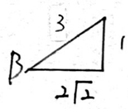
令 $s=\sin B$

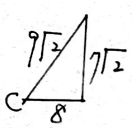
$\Rightarrow 21s(1-s^2)=8(1-2s^2)$

$\Rightarrow 21s^3-16s^2-21s+8=0$

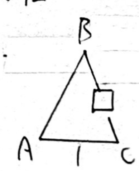
$$\begin{array}{rrrr|l}21&-16&-21&+8&\frac{1}{3}\\ +)&+7&-3&-8&\\ \hline 21&-9&-24&0&\end{array}$$

$(3s-1)(21s^2-9s-24)=0$





$\tan C=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{21}{16}=\frac{7\sqrt{2}}{8}$



$\frac{\square}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}\Rightarrow\square=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \Delta=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7\sqrt{2}}{9}$

(用 $t=\tan B$ 處理 就可以了) $\sin B=\frac{1}{3}$ or $\frac{9\pm\sqrt{81+4\cdot 21\cdot 24}}{2\cdot 21}\notin(-1,1)$

(Δ → 正弦 → 2次 $\sin B$ 處理)

Created with Scanner Pro