國立臺南女子高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選題目(數學科)

一、填充題：(每題 5 分，共 50 分)

注意：所有答案請化簡為最簡分數或最簡根式，否則不予計分

1.設數列$\langle x_n \rangle$滿足$x_1=1$，且對任意正整數n，$x_n-2x_nx_{n+1}-x_{n+1}=0$均成立。試求$\sum_{k=1}^{200}x_kx_{k+1}$之值為______。

2. TWICE為韓國JYP娛樂旗下在2015年強勢推出的九人女子團體，成員均透過Mnet生存實境節目《SIXTEEN》脫穎而出。成員包含韓國籍成員志效(隊長)、定延、娜璉、多賢、彩瑛、日本籍成員Momo、Sana、Mina及台灣籍成員子瑜，公司為籌備新專輯於5/3拍攝專輯封面照，已知隊長志效必站在正中央，四位非韓籍的團員不完全站在隊長的同一側，且娜璉跟Momo因近來吵架而不排在一起，則此九人排成一列拍照的排列數有________種。

3.已知ΔABC中，$\overline{AC}=4$、$\overline{BC}=3$。在ΔABC內部有一點P滿足$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$，且$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，則$\angle C$的餘弦值為_______。

4.已知函數$f(x)=\int_c^x\left(t^2+at+b\right)dt$在$x=1, 3$時有極值，且$f(0)=\dfrac{16}{3}$，求實數序對$(a,b,c)=$__________。

5.已知$x\in[0,3]$，求$\dfrac{\sqrt{6x^3+7x^2+2x}}{3x^2+4x+1}$的最大值為_____

6.若$\left[x\right]$表示不超過x的最大整數，求$\sum_{n=1}^{2024}(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right])=$________

7.已知非零向量$\overrightarrow{a}$和$\overrightarrow{b}$互相垂直，若$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$和$\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$的夾角為$\theta$，則$\cos\theta$的最小值為________

8.有三個半徑分別為 2、3、4 的圓，且這三個圓兩兩外切，切點分別為A、B、C，則ΔABC的面積為_________。

9.試求方程式$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\log\left|x+\frac{\pi}{4}\right|$的所有實根之和為____________。

10.在直角坐標系中，已知點$A\left(9,11\right)$，點P為圓$C:\left(x-5\right)^2+\left(y-3\right)^2=4$上一點，點$Q$為直線$x+y=0$上一點，則$\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}\right|$的最小值為____________。

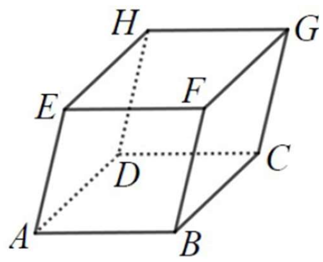
二、計算證明題：(每題 10 分，共 50 分)

1.設 n 為正整數，且 $n \ge 2$ ，又多項式 $f(x)=3x^n+2x^{n-1}-5$ 被 x^2-5x+6 除之，得餘式為 $p_n x+q_n$ ，則 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p_n}{6^n}$ 之值為何?

2. 已知 ΔABC 的三邊長滿足 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3\overline{AB}^2$ ，則 $\sin C$ 的最大值為何?

3. 已知 x 、 y 為實數，且滿足 $\begin{cases} x+y=2 \\ x^4+y^4=1234 \end{cases}$ ，試求 xy 之值。

4.右圖為平行六面體 $ABCD-EFGH$，已知 $\overleftrightarrow{AB}:\frac{x+3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$ ， $\overleftrightarrow{EH}:\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-1}{1}$ ， $\overleftrightarrow{CG}:\frac{x-7}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-13}{-1}$。若不在上述三條直線上的點 $(9,7,8)$ 是此平行六面體之其中一頂點，則此平行六面體的體積為何?



5.已知 ΔABC 滿足 $\sin A=\cos B=\frac{16}{21}\tan C$ ，且 $\overline{AC}=1$ ，試求 ΔABC 的面積。

國 立 臺 南 女 子 高 級 中 學 113 學 年 度 第 1 次 教 師 甄 選 答 案 (數 學 科)

一、填充題：(每題 5 分，共 50 分)

1.	2.	3.	4.	5.
$\frac{200}{401}$	30528	$\frac{5}{6}$	$(-4,3,-1)$	$\frac{1}{2}$

6.	7.	8.	9.	10.
2047276	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{48\sqrt{6}}{35}$	$-\frac{5\pi}{2}$	$16\sqrt{2}-2$

二、計算證明題：(每題 10 分，共 50 分)

1. $\frac{7}{6}$

詳解：$\begin{cases} f(2)=3\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}-5=4\cdot 2^n-5=2p_n+q_n \\ f(3)=3\cdot 3^n+2\cdot 3^{n-1}-5=\frac{11}{3}\cdot 3^n-5=3p_n+q_n \end{cases}$

$$\Rightarrow p_n=\frac{11}{3}\cdot 3^n-4\cdot 2^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p_n}{6^n}=\sum_{n=2}^{\infty}[\frac{11}{3}\cdot(\frac{1}{2})^n-4\cdot(\frac{1}{3})^n]=\frac{11}{3}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^2}{1-\frac{1}{2}}-4\cdot\frac{(\frac{1}{3})^2}{1-\frac{1}{3}}=\frac{11}{6}-\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$$

2. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

詳解：假設 $a=\overline{BC}$□$b=\overline{AC}$□$c=\overline{AB}$，

由餘弦定理可知，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\left(a^2+b^2\right)-\frac{1}{3}\left(a^2+b^2\right)}{2ab}=\frac{\frac{2}{3}\left(a^2+b^2\right)}{2ab}=\frac{a^2+b^2}{3ab}$ ……①

又由算幾不等式可知：$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{a^2b^2}=ab$，所以 $a^2+b^2\geq 2ab$，

代入①式可得，$\cos C=\frac{a^2+b^2}{3ab}\geq\frac{2ab}{3ab}=\frac{2}{3}$□

又因為 $\sin^2 C+\cos^2 C=1$，所以 $\sin^2 C=1-\cos^2 C\leq 1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$□即 $\sin C$ 有最大值 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 。

3. -21

詳解：設 $xy=p$

則 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-2p$

$\Rightarrow x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=(4-2p)^2-2p^2=2p^2-16p+16=1234$

$\Rightarrow p^2-8p-609=0$

$\Rightarrow (p+21)(p-29)=0$

$\Rightarrow p=-21$ 或 29

又因為 $x^2+y^2=4-2p\geq 0 \quad \Rightarrow p\leq 2$ ，

所以 $xy=p=-21$

4. 84

詳解：

(i)若 $D(9,7,8)$，則 $\overleftrightarrow{AD}:\dfrac{x-9}{2}=\dfrac{y-7}{-1}=\dfrac{z-8}{1}$，$A:\begin{cases}2s+9=2t-3\\-s+7=t\\s+8=2t-1\end{cases}\Rightarrow s,t$ 無實數解

(ii)若 $F(9,7,8)$，則 $\overleftrightarrow{BF}:\dfrac{x-9}{2}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z-8}{-1}$，$B:\begin{cases}2s+9=2t-3\\2s+7=t\\-s+8=2t-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s=-1\\t=5\end{cases}\Rightarrow B(7,5,9)$，

$\overrightarrow{v_{AB}}\times\overrightarrow{v_{AD}}=(2,1,2)\times(2,-1,1)=(3,2,-4)$

則平面 $ABCD$ 的方程式為 $3x+2y-4z=-5$，設 F 對 $\overleftrightarrow{EH}$ 的垂足點為 $P(2m+1,-m+5,m+1)$，F 對 $\overleftrightarrow{CG}$ 的垂足點為

$Q(2n+7,2n-1,-n+13)$，則 $\overrightarrow{FP}=(2m-8,-m-2,m-7)$ 且 $\overrightarrow{FQ}=(2n-2,2n-8,-n+5)$，$\begin{cases}\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{v_{EH}}=0\\\overrightarrow{FQ}\cdot\overrightarrow{v_{CG}}=0\end{cases}\to\begin{cases}m=\dfrac{7}{2}\\n=\dfrac{25}{9}\end{cases}$

$\overrightarrow{FP}=\left(-1,-\dfrac{11}{2},-\dfrac{7}{2}\right)$、$\overrightarrow{FQ}=\left(\dfrac{32}{9},-\dfrac{22}{9},\dfrac{20}{9}\right)$，$\left|\overrightarrow{FP}\right|=\dfrac{\sqrt{174}}{2}$，$\left|\overrightarrow{FQ}\right|=\dfrac{2\sqrt{53}}{3}$

令 $\overleftrightarrow{EF}$ 與 $\overleftrightarrow{EH}$ 的銳夾角為 α 且 $\overleftrightarrow{FG}$ 與 $\overleftrightarrow{CG}$ 的銳夾角為 β

則 $\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{v_{EF}}\cdot\overrightarrow{v_{EH}}\right|}{\left|\overrightarrow{v_{EF}}\right|\left|\overrightarrow{v_{EH}}\right|}=\dfrac{5}{3\sqrt{6}}$ 且 $\cos\beta=\dfrac{\left|\overrightarrow{v_{FG}}\cdot\overrightarrow{v_{CG}}\right|}{\left|\overrightarrow{v_{FG}}\right|\left|\overrightarrow{v_{CG}}\right|}=\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{29}}{3\sqrt{6}}$ 且 $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{53}}{3\sqrt{6}}$

$\left|\overrightarrow{FP}\right|=\overline{EF}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{174}}{2}\to\overline{EF}=9$ 且 $\left|\overrightarrow{FQ}\right|=\overline{FG}\sin\beta=\dfrac{2\sqrt{53}}{3}\to\overline{FG}=2\sqrt{6}$

平行六面體的體積 $=\overline{EF}\times\overline{FG}\times\sin\alpha\times d(F,\text{平面}ABCD)=9\times2\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{29}}{3\sqrt{6}}\times\dfrac{14}{\sqrt{29}}=84$

5. $\dfrac{7\sqrt{2}}{9}$

詳解：

$\cos B=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm B\right)\Rightarrow\sin A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm B\right)\Rightarrow\angle A=\dfrac{\pi}{2}\pm\angle B$，若 $\angle A=\dfrac{\pi}{2}-\angle B$，則 $\angle C=\dfrac{\pi}{2}$，$\tan C$ 無意義(不合)，

故 $\angle A=\dfrac{\pi}{2}+\angle B$

$\angle A=\dfrac{\pi}{2}+\angle B\Rightarrow\angle C=\dfrac{\pi}{2}-2\angle B\Rightarrow\cos B=\dfrac{16}{21}\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-2B\right)=\dfrac{16}{21}\cdot\dfrac{1}{\tan2B}=\dfrac{16}{21}\cdot\dfrac{\cos2B}{\sin2B}$

$\cos B=\dfrac{16}{21}\cdot\dfrac{1-2\sin^2B}{2\sin B\cos B}\Rightarrow21\sin B\cos^2B=8\left(1-2\sin^2B\right)\Rightarrow21\sin B\left(1-\sin^2B\right)=8\left(1-2\sin^2B\right)$

$21\sin^3B-16\sin^2B-21\sin B+8=0\Rightarrow(3\sin B-1)\left(7\sin^2B-3\sin B-8\right)=0$，$\sin B=\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{3\pm\sqrt{233}}{14}$

注意 $\sin B=\dfrac{3+\sqrt{233}}{14}>1$(不合)及 $\sin B=\dfrac{3-\sqrt{233}}{14}<0\Rightarrow\angle B>\dfrac{\pi}{2}$(不合)，故 $\sin B=\dfrac{1}{3}$，得 $\cos B=\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$、$\cos A=-\dfrac{1}{3}$、

$\tan C=\dfrac{7\sqrt{2}}{8}\Rightarrow\sin C=\dfrac{7\sqrt{2}}{9\sqrt{2}}=\dfrac{7}{9}$，由正弦定理 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}$ 得 $\dfrac{1}{\frac{1}{3}}=\dfrac{\overline{BC}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$，$\overline{BC}=2\sqrt{2}$

則 $a\Delta ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2\sqrt{2}\cdot\dfrac{7}{9}=\dfrac{7\sqrt{2}}{9}$