

1. 已知 O 為 $\triangle ABC$ 的外心， \overline{AB} 的長度為 $2l$ ， \overline{AC} 的長度為 $\frac{2}{l}$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，若向量 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，試求 $x + y$ 的最小值。

2. 已知函數 $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x} + b$ ，其中 x 為非零實數。若實數 a, b 使得 $f(x) = 0$ 有實根，試求 $a^2 + b^2$ 的最小值。

3. 已知常數 e 為自然底數，且函數 $f(x) = e^x(x - ae^x)$ 恰有兩個不同的極值點，試求實數 a 的取值範圍。

4. 長方形紙片 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AD} = 2\sqrt{3}$ ，今將此長方形紙片，沿對角線 \overline{AC} 折起。使折起後的半平面 ACD 與半平面 ABC 所夾的兩面角為 $\frac{\pi}{3}$ ，求 \overline{BD} 的長度

ANS: $\sqrt{21}$

5. 在坐標平面上，將一個過原點且半徑為 r 的圓，完全放入 $y \geq x^4$ 的區域內，此時 r 的最大值為何？

ANS: $\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$

6. 設 $x \in \mathbb{R}$ ，則 $f(x) = \left| \frac{x^2 + 24}{8} \right| - \sqrt{\frac{x^4}{64} + \frac{x^2}{2} - \frac{9x}{2} + \frac{145}{16}}$ 之最大值為何？

ANS: $\frac{13}{4}$

7. 有一個遊戲的規則如下：從一個裝有編號 1~9 號共 9 顆球的箱子中一次抽出三顆相異的球，若所得的 3 個號碼滿足下列條件 A 或條件 B 之一，則可得獎金 100 元；若條件 A、B 都滿足，則可得獎金 400 元；若條件 A、B 均不滿足，則無獎金。求此遊戲獲得獎金的期望值。

條件 A：三個號碼皆為奇數或皆為偶數。

條件 B：三個號碼由小排到大為等差數列。

ANS: 50 元

8.坐標平面上， A 、 B 兩點分別在直線 $L_1: x = -\frac{3}{2}$ 與 $L_2: x = \frac{3}{2}$ 上。 $\overline{AB} \perp L_1$ ，且 M 、 N 為 \overline{AB} 的三等分點，並滿足 $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NB}$ 。設 Γ_1 為以 L_1 為準線， N 為焦點的拋物線； Γ_2 為以 L_2 為準線， N 為頂點的拋物線，求 Γ_1 與 Γ_2 所圍區域的面積。

ANS: $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

9.坐標平面上， $y = 2^{-x}$ 與 $y = \cos(2x + \pi) + \frac{1}{2}$ 的圖形在 y 軸右側的交點由左而右依序為 A_1, A_2, A_3, \dots 。若以 x_k 表示點 A_k 的 x 坐標，並定義數列 $\langle C_n \rangle = \langle x_{2n} - x_{2n-1} \rangle$ ，

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ 。

ANS: $\frac{2\pi}{3}$

10.求以橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = 1$ 內接正方形四個頂點中的其中兩個為焦點，另外兩個為頂點的橢圓方程式。

ANS: $3x^2 \pm 2xy + 3y^2 = 8$