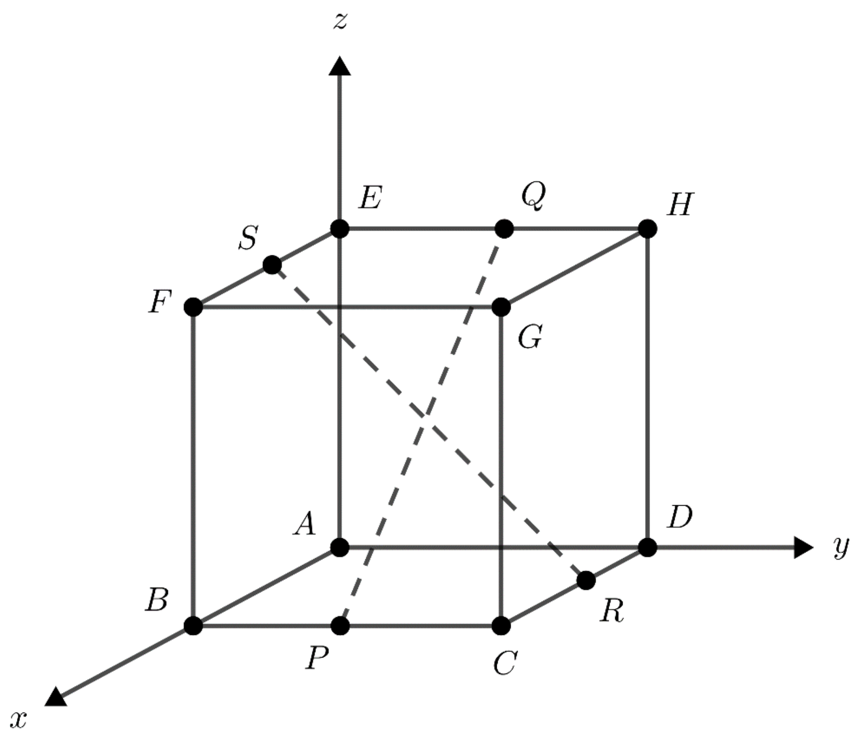
高雄市立高雄女子高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

（記憶版）

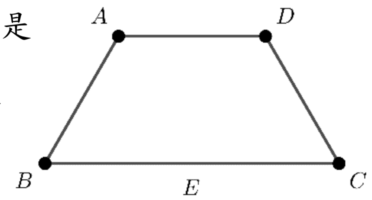
計算證明題共 12 題

1. 空間中有一個邊長為 15 的正方體 $ABCD-EFGH$，如圖，將頂點 A 放置於空間坐標系原點的位置，頂點 B 於 x 軸正向上，頂點 E 於 z 軸正向上。點 P、Q、R、S 分別在 $\overline{BC}$、$\overline{EH}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$ 上，其中 $P(15,7,0)$、$Q(0,12,15)$ 且 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{RS}$ 相交於 M，則 M 點坐標為何？（8 分）



2. 設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為一個可逆的線性變換矩陣，已知平面上點 $P_1(1,2)$ 經過矩陣 A 的變換後可得到點 $Q(-4,-5)$，且點 $P_2(2,1)$ 經過 2 次矩陣 A 的變換後也可得到點 $Q(-4,-5)$，求矩陣 $A=$________。（8 分）

3. 如圖，有一個等腰梯形 $ABCD$，滿足 $\overline{AD}=\overline{AB}=\overline{CD}=2$，$\overline{BC}=4$，$E$ 是 $\overline{BC}$ 中點，現沿著 $\overline{AE}$、$\overline{DE}$ 分別將 ΔABE、ΔDCE 等速往上折起，求



(1) 從開始折起到 B 點與 C 點重合，B 點前後位置的直線距離為何？

(2) 當 ΔABE、ΔDCE 皆與底面 ΔADE 垂直時，此時 $\overline{BC}=$＿＿＿＿＿，$\cos\angle BEC=$＿＿＿＿＿。

（10 分）

4. 坐標平面上，設 $\Gamma_1: y=-(x+5)^2$ 與 $\Gamma_2: y=x^2$。若將 Γ_1 的圖形沿著向量 $(1,1)$ 的方向平移後與 Γ_2 的圖形有交點，則其交點之 y 坐標的最大值為何？（8 分）

5. 設三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，其中 $a\neq 0$ 且 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$，則

(1) 試利用$\boxed{\text{配方法}}$將 $f(x)$ 化為 $a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式，並以 a、b、c、d 表示數對 (p,h,k)。

(2) 若 $y=f(x)$ 圖形上的相異四點 A、B、C、D 滿足：A 與 B 的中點即為 C 與 D 的中點。試證明：此中點為 $y=f(x)$ 圖形的對稱中心。（10 分）

6. 設實函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 為週期函數，且其週期分別為 T_1 與 T_2，其中 $T_1T_2\neq 0$，則

(1) 試證明：若 $\dfrac{T_1}{T_2}$ 為有理數，則 $f_1(x)+f_2(x)$ 亦為週期函數。

(2) 設 $f_1(x)=\sin ax$ 與 $f_2(x)=\sin bx$，其中 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq b$。

試證明：若 $f_1(x)+f_2(x)$ 為週期函數，則 $\dfrac{a}{b}$ 為有理數。（8 分）

7. 已知$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$，$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$，

試求$\sum_{k=1}^{n}k^4=$________。（以 n 表示之）（8 分）

8. 設複數數列$\langle a_n\rangle : a_n=\omega^{n^2}, \forall n\in\mathbb{N}$，其中$\omega=\cos\frac{2\pi}{11}+i\sin\frac{2\pi}{11}$。試求：

(1) $\sum_{n=1}^{10}a_n$ 的實部＝？

(2) $\sum_{n=1}^{10}a_n$ 的虛部＝？（8 分）

9. 如圖，將數字排成三角形，規則如下：

(I) 從上而下三角形兩邊的數字分別為$0, 1, 4, 9, \cdots, (n-1)^2$。

(II) 中間的每一個數字皆為其上方相鄰兩數字之和（如同巴斯卡三角形）。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 4 & & 2 & & 4 & & & \\
 & & 9 & & 6 & & 6 & & 9 & & \\
 & 16 & & 15 & & 12 & & 15 & & 16 & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

若 a_n 為圖中第 n 列所有數字總和，$\forall n\in\mathbb{N}$，例如：$a_1=0, a_2=2, a_3=10, a_4=30, \cdots$。試求：

(1) $\langle a_n\rangle$的遞迴關係式。

(2) $\langle a_n\rangle$的一般項$a_n=$？（以 n 表示之）（8 分）

10. 假設 F 為二次曲線$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的右焦點。過二次曲線外的點 P 作此二次曲線的切線，其中切點為 M，若$\angle PFM=90°$，試求點 P 的軌跡方程式。（8 分）

11. 假設數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt{3\cdot 4}+\cdots+\sqrt{n\cdot(n+1)}$，試求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}}{a_n}$之值。(8 分)

12. 假設複數$z_1=-3-\sqrt{3}i$，$z_2=\sqrt{3}+i$，$z=\sqrt{3}\sin\theta+i(\sqrt{3}\cos\theta+2)$，

試求$\left|z-z_1\right|+\left|z-z_2\right|$的最小值。(8 分)