2024.4.14(日)～2024.4.17(三) Ru

記

1 國立新竹女子高級中學 113 學年度第 1 學期第 1 次教師甄選

$\frac{w}{z}-1=\frac{3}{4}C-1+\frac{3}{4}S\cdot i$

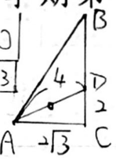
$\tan\theta=k=\frac{3S}{3C-4}$

$3kC-3S=4k \Rightarrow |4k|\le\sqrt{9k^2+9} \Rightarrow k^2\le\frac{9}{7}$

$\boxed{2}$ $f'(x)=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{9\cdot 2x}{\sqrt{9x^2+16}}=0 \Rightarrow x^2=\frac{64}{45} \Rightarrow x=-\frac{8\sqrt5}{15}$

$\beta=\frac{-16\sqrt5}{15}+\frac{12}{5}\sqrt5=\frac{4}{3}\sqrt5$

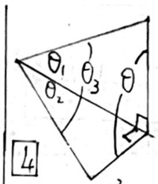
$\boxed{3}$



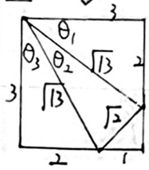
$3(\frac{1}{3}\vec{PB}+\frac{2}{3}\vec{PC})\cdot\vec{PA}=3\vec{PD}\cdot\vec{PA}\ge 3\cdot2\cdot2\cdot(-1)=-12$

P為$\overline{AD}$中點時,有min

$\boxed{4}$

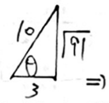


$\cos\theta=\frac{\cos\theta_3-\cos\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_1\sin\theta_2}$



$\cos\theta_2=\frac{24}{2\cdot13}=\frac{12}{13}$

$\cos\theta=\frac{\frac{3}{\sqrt{13}}-\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{12}{13}}{\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{5}{13}}=\frac{3}{10}$



$\Rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{91}}{10}$

一、填充題：每題 5 分，共 50 分

1. 已知 w 和 z 是兩個複數且滿足 $|w|=3$，$|z|=4$，若 $\theta=\arg\left(\frac{w-z}{z}\right)$，則 $\tan^2\theta$ 的最大值為______。$\frac{9}{7}$

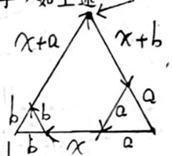
2. 設函數 $f(x)=2x+\sqrt{9x^2+16}$ 在 $x=\alpha$ 時，有最小值 $f(\alpha)=\beta$，試求數對 $(\alpha,\beta)=$________。$(\frac{-8\sqrt5}{15},\frac{4\sqrt5}{3})$

3. 設 ΔABC 中，$\angle BAC=60°$, $\overline{AB}=4\sqrt3$, $\overline{AC}=2\sqrt3$，D 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的角平分線，若 P 是線段 $\overline{AD}$ 上的動點，則 $(\overline{PB}+2\overline{PC})\cdot\overline{PA}$ 的最小值為何？_________ -12

4. 一正方形紙張 $ABCD$，設點 E, F 分別在 $\overline{BC}, \overline{DC}$ 邊上，且 $\overline{BE}:\overline{EC}=\overline{DF}:\overline{FC}=2:1$。現以正方形 $ABCD$ 為底面，分別將 B, D 以 $\overline{AE}, \overline{AF}$ 為谷摺線向上摺起，使得 $\overline{AB}, \overline{AD}$ 重合，並令重合後的點 $B=D=G$。此時，若側面 ΔAEG（或 ΔAFG）與箏形底面 $AECF$ 的夾角為 θ，則 $\sin\theta=$______。$\frac{\sqrt{91}}{10}$

5. 小沂在平面上以下面丟骰子的方式前進：丟一公正六面骰子，出現 n 點就往前走 n 公尺，接著順時針轉 60 度。接著再繼續丟骰子，如上述方式前進以及轉向。則小沂丟五次骰子並走完後回到原來出發位置的機率為____________（分母可以不用乘開）。$\frac{55}{6^5}$

姊
矣



$\boxed{5}$ thepiano $(1^2+2^2+\cdots+5^2)/6^5=55/6^5$

x	a	b
5	1	1
4	1~2	1~2
3	1~3	1~3
2	1~4	1~4
1	1~5	1~5

6. 若 S 是滿足 $0<x\le1$、$0<y\le1$ 且 $\left[\log_2\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ 與 $\left[\log_3\left(\frac{1}{y}\right)\right]$ 均為奇數的坐標 (x,y) 所組成的集合，則集合 S 所表示的圖形面積為 $([x]$ 表不大於 x 的最大整數$)$。$\frac{1}{12}$

$\boxed{6}$ $\begin{pmatrix}1/2-1/2^2\\+1/2^3-1/2^4\\+1/2^5-1/2^6+\cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3-1/3^2\\+1/3^3-1/3^4\\+1/3^5-1/3^6\cdots\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

$[\log_2(1/x)]$	$\log_2(1/x)$	x
1	$[1,2)$	$(1/2^2,1/2]$
2	$[3,4)$	$(1/2^4,1/2^3]$
3	$[5,6)$	$(1/2^6,1/2^5]$

$[\log_3(1/y)]$	$\log_3(1/y)$	y
1	$[1,2)$	$(1/3^2,1/3]$
2	$[3,4)$	$(1/3^4,1/3^3]$
3	$[5,6)$	$(1/3^6,1/3^5]$

7. 考慮集合 $\{1,2,3,\ldots,2024\}$ 的子集 S，其中集合 S 的元素個數為 1000。若從滿足上述條件中的每個集合 S 裡挑選出最小的元素，則所有這些最小元素的算術平均數為________。$\frac{2025}{1001}$

$\boxed{7}$ 分子: $1\cdot C^{2023}_{999}+2\cdot C^{2022}_{999}+3\cdot C^{2021}_{999}+\cdots+1025C^{999}_{999}$

$=C^{2023}_{999}+C^{2022}_{999}+\cdots+C^{1000}_{999}+C^{999}_{999}\to C^{2024}_{1000}$ 和 C^{2025}_{1001}

$+C^{2022}_{999}+\cdots+C^{999}_{999}\to C^{2023}_{1000}$

$+C^{999}_{999}\to C^{1000}_{1000}$

分母 $C^{2023}_{999}+C^{2022}_{999}+\cdots+C^{999}_{999}=C^{2024}_{1000} \Rightarrow \frac{C^{2025}_{1001}}{C^{2024}_{1000}}=\frac{2025}{1001}$

8. 設數列 $a_k=k^3$，試求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{3n-1}\frac{n^2}{a_k}=$_________。$\frac{4}{9}$

$\boxed{8}$ $\sum_{k=n}^{3n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(\frac{k}{n})^3}\to\int_1^3 x^{-3}dx=\frac{-1}{2}x^{-2}\Big|_1^3=\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{9})=\frac{4}{9}$

反演

好難

9. 設 $A(1,\sqrt3)$, $B(1,-\sqrt3)$ 為平面上兩定點，動點 P 在線段 $\overline{AB}$ 上。O 為原點，且 Q 在射線 $\overline{OP}$ 上，並滿足 $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=4$。當動點 P 由 A 延著線段 $\overline{AB}$ 移動到 B 時，試求 Q 點軌跡圖形的路徑長為何？__________ $\frac{8\pi}{3}$

$\boxed{9}$ $P(1,t)$ $(t^2+1)(x^2+y^2)=16$ 設 $Q(x,y)$ $t=\frac{y}{x} \Rightarrow (x^2+y^2)^2-16x^2=0 \Rightarrow ((x+2)^2+y^2-4)\cdot((x-2)^2+y^2-4)=0$ $\because x\ge1$ $\therefore (x+2)^2+y^2=4$ 不合

$(x-2)^2+y^2=4$

$2\pi r\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3}\pi$

yymath

tree + Geo

10. 冰果飲料店推出集字活動，凡購買任何一杯飲品，皆能獲得一張集字卡，只要收集「中」、「獎」、「囉」三字，即可免費兌換一杯綠茶。已知集字卡上出現「中」的機率為 $\frac{1}{2}$、出現「獎」的機率為 $\frac{1}{3}$、出現「囉」的機率為 $\frac{1}{6}$。請問成功收集到「中」、「獎」、「囉」三字，所需要購買飲品杯數的期望值為______________杯。$\frac{73}{10}$

$\boxed{10}$ 令 $E_A\equiv$ 只取到A時 取完A,B,C的期望值

$E_B\equiv$ ～ B ～

$E_C\equiv$ ～ C ～

$\frac{1}{2}\to A$: $\frac{1}{3}\to B\to Geo(\frac{1}{6})$, $\frac{1}{6}\to C\to Geo(\frac{1}{3})$

$\frac{1}{3}\to B$: $\frac{1}{2}\to A\to Geo(\frac{1}{6})$, $\frac{1}{6}\to C\to Geo(\frac{1}{2})$

$\frac{1}{6}\to C$: $\frac{1}{2}\to A\to Geo(\frac{1}{3})$, $\frac{1}{3}\to B\to Geo(\frac{1}{2})$, $\frac{1}{6}\to C$

取1次

$E_A=\frac{3}{6}(E_A+1)+\frac{2}{6}(6+1)+\frac{1}{6}(3+1) \Rightarrow E_A=\frac{21}{3}=7$

$E_B=\frac{3}{6}(6+1)+\frac{2}{6}(E_B+1)+\frac{1}{6}(2+1) \Rightarrow E_B=\frac{26}{4}=\frac{13}{2}$

$E_C=\frac{3}{6}(3+1)+\frac{2}{6}(2+1)+\frac{1}{6}(E_C+1) \Rightarrow E_C=\frac{19}{5}$

$E=\frac{1}{2}E_A+\frac{1}{3}E_B+\frac{1}{6}E_C+1=\frac{7}{2}+\frac{13}{6}+\frac{19}{30}+1=\frac{219}{30}=\frac{73}{10}$

二、偵錯題、說明題：(共 12 分)(※請務必寫下原因或說明過程，否則不予計分)

空間中，A 點坐標為 $(-2,8,0)$，B 點坐標為 $(3,1,4)$，P 點為 y 軸上一點，當 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值時，P 點坐標為何？

【以下為學生小沂的解法】

因為 $\overline{PA}\ge0$，$\overline{PB}\ge0$，故由算幾不等式可得

$$\frac{\overline{PA}+\overline{PB}}{2}\ge\sqrt{\overline{PA}\times\overline{PB}}$$

等式成立時，$\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值且發生在 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 時。因為 P 點為 y 軸上一點，假設 P 點坐標為 $(0,y,0)$，

$$\overline{PA}=\overline{PB}\Rightarrow\sqrt{2^2+(y-8)^2}=\sqrt{3^2+(y-1)^2+4^2}\Rightarrow y=3，$$

因此，P 點坐標為 $(0,3,0)$。

1. 請問：小沂的解法是對的嗎？若老師覺得此學生的解法錯誤，要如何協助學生釐清錯誤的迷思呢？(4 分)
2. 如果您正在教授「高一」的學生，想避免學生有類似上述的錯誤方式，您要如何設計一道教學題目並給出類似上面的錯誤解法，讓學生偵錯呢？透過此道數學題目，要如何協助學生釐清錯誤的迷思呢？(8 分)