國立臺灣師範大學附屬高級中學 113 學年度第 1 次正式教師甄選數學科筆試〔題目卷〕

一、　選填題：（每題 5 分，共 90 分。填在答案卡上，**分數或根式須以最簡形式回答**，否則不予計分）

A. 試求方程式 $x=8^{\log_2 x}-9^{\log_3 x}-4^{\log_2 x}+\log_{0.5}0.25$ 的所有解之和為 ① 。

B. 已知 $(1-2x)^5(1+4x^2)^5(1+2x)^5$ 的展開式中，x^{12} 與 x^{16} 的係數依序為 a 與 b，試求 $\frac{b}{a}=$ ②③ 。

C. 已知 12 個數據 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{12}$，其算術平均數為 13、標準差為 5，將這 12 個數據標準化後依序得 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_{12}$，則 $\sum_{i=1}^{12}a_ib_i=$ ④⑤ 。

D. 在直角坐標平面上，由點 $A(6,7)$ 對圓 $x^2+y^2=10$ 作兩切線交此圓於 P、Q 兩點。若 B 為射線 $\overrightarrow{AQ}$ 上一點，則 $\frac{\overline{BA}}{\overline{BP}}$ 的最大值為 $\frac{⑥⑦\sqrt{⑧⑨}}{60}$ 。

E. 迎新活動時，學長姐設計了 6 道不同的關卡，學弟妹可以挑戰各個關卡蒐集分數以取得最後的勝利，每一次只可以挑戰一個關卡，且不可以連續兩次挑戰同一關卡，而每一個關卡的挑戰次數不限。已知某一隊學弟妹總共挑戰了 7 次關卡，且開始與結束時都停留在同一個關卡。若他們挑戰此 7 次關卡的可能狀況總共有 $30k$ 種，則 $k=$ ⑩⑪⑫ 。

F. 已知直角坐標平面上三點 $O(0,0)$ 、 $A(1,7)$ 、 $B(7,-1)$，若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-19$，則 $\overline{OP}$ 長度的最大值為 ⑬$+\sqrt{⑭}$ 。

G. 已知 a,b 為實數，試求 $(3a-2b+1)^2+(2a+b-2)^2+(4a-5b-3)^2$ 的最小值為 $\dfrac{⑮⑯}{⑰}$ 。

H. 已知空間中一直線 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ 與兩點 $A(0,1,3)$ 、 $B(1,3,-2)$。若點 P 為直線 L 上一動點，則 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值為 $\sqrt{⑱⑲}$ 。

I. 某袋中有大小形狀相同的三顆紅球、四顆綠球與五顆藍球，今隨機從袋中一次取一顆球，取後不放回。試求在「紅球→藍球→綠球」依次被取完的條件下，紅球取完之前至少已經先取出兩顆藍色球的機率為 $\dfrac{⑳㉑}{㉒㉓}$ 。

J. 已知空間中有一四面體，其對邊（不相鄰的兩邊）長度兩兩相同。若此四面體的六個兩面角分別為 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_6$，並且 $\theta_1=120°$，則 $\sum_{i=2}^{6}\left(2\cos\theta_i\right)$ 的最大值為 ㉔ 。

K. 試求 $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+3x^4+4x^3+3x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x+1}\right)=\dfrac{㉕㉖}{㉗}$ 。

L. 已知多項式函數 $f(x)$ 滿足 $(x-1)f(x)=4\int_{1}^{x}f(t)dt$。若 $f(0)=-2$，試問 $f(5)=$ ㉘㉙㉚ 。

M. 已知複數 z、ω 滿足 $z^8=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 且 $\omega=t(-\sqrt{3}+4i)+(2-2t)i$，其中 t 為實數，試求 $\left|z-\omega\right|$ 的最小值為

$\dfrac{㉛\sqrt{㉜㉝}-㉞\sqrt{㉟}}{14}$ 。

N. 試求二次曲線 $13x^2-10xy+13y^2-6x-42y-27=0$ 的正焦弦長為 $\dfrac{㊱}{㊲}$ 。

O. 某工廠的檢核人員逐一檢查某批產品，直到檢驗到不良品為止，令隨機變數 X 代表此次檢查的次數。今設定當 $P(X\geq k)<0.1$ 時，拒絕「此產品良率為八成」的假設。求拒絕此假設時 k 的最小正整數值為 ㊳㊴ 。

P. 若方程組 $\begin{cases}x(y+z-x)=39-2x^2\\ y(z+x-y)=52-2y^2\\ z(x+y-z)=78-2z^2\end{cases}$ 的正實數解為 $\begin{cases}x=a\\ y=b\\ z=c\end{cases}$，則 $abc=$ ㊵㊶ 。

Q. 已知△ABC 中，$\angle ACB = 90^\circ$，$\overline{AB} = 2\overline{AC}$，又此三角形內部有一點 P，滿足 $\overline{PA} = \sqrt{2}$、$\overline{PB} = \sqrt{10}$ 且 $\overline{PC} = 1$，則

△ABC 的面積為 $\underline{\dfrac{㊷\sqrt{㊸}+\sqrt{㊹}}{㊺}}$。

R. 平面上有向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$，滿足 $|\overrightarrow{a}| = 2|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}| = |5\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}| = 1$。若 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{d}$ 的夾角為 $\dfrac{\pi}{4}$，則 $|\overrightarrow{b}-\overrightarrow{d}|+|\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d}|$ 的最小

值為 $\underline{\dfrac{㊻㊼}{㊽}+\sqrt{㊾㊿}}$。

二、 證明題：(共 10 分。請用黑色或藍色原子筆寫在作答卷上，須詳細過程，否則酌予扣分)

1. 已知 a,b,c 為正實數，且滿足 $abc = 1$，試證明：$\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(a+c)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)} \geq \dfrac{3}{2}$