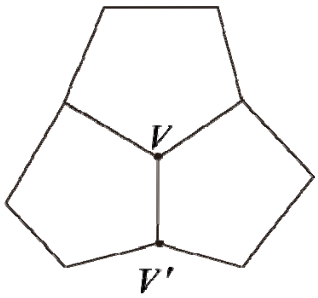
仿《幾何原本》從正六面體構造正十二面體

張海潮

臺灣大學數學系退休教授

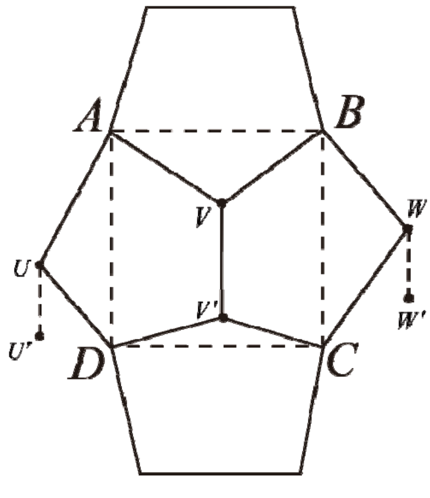
筆者曾經在 2009 年《數學傳播》33 卷 3 期 pp.72~73 發表過一篇〈在球面上鋪二十個球面三角形〉，主旨是為了利用基本的球面幾何來證明正二十面體的存在性。大家都知道在五種正多面體中，比較困難的是正十二面體和正二十面體。但是由於上述這兩個多面體互為對偶，亦即若是取正二十面體每一個面的重心來作為頂點，這二十個頂點就可以連出一個正十二面體，反之亦然。因此作出了正二十面體就等於作出了正十二面體，只是過分迂迴。

本文的目的，是仿《幾何原本》利用正六面體來作正十二面體（註一）。如圖一，在正十二面體的一個頂點V的周圍有三個正五邊形：



圖一

在圖中有另一個頂點V'，在V'周圍也有三個正五邊形，合起來有四個，如圖二：



圖二

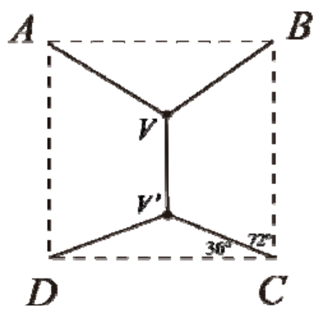
圖二中有四條虛線$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$，分別是這四個正五邊形的對角線，$ABCD$構成一個正方形，原因如下：

首先，$\overline{AD}$和$\overline{BC}$平行，這是因為它們同樣是從VV'向左右兩邊對稱搭出來的正五邊形的對角線。$\overline{AD} // \overline{BC}$表示$ABCD$在同一個平面上，所以$ABCD$至少是一個菱形。其次，$\angle DAB = \angle CBA$（同理，因為對稱於$VV'$），所以$ABCD$是一個正方形。這個正方形用了正十二邊體的四個頂點$A$、$B$、$C$、$D$而略去了兩個頂點$V, V'$。

我們可以繼續延展我們看到的正方形，例如B, C可以是VV'右邊往下延展的正方形的頂點，而A、D是VV'左邊往下延展的正方形的頂點。相對於V, V'，右邊有WW'，左邊有UU'，WW'和UU'平行，並且在空間中同時與VV'垂直。

因此在一個正十二面體中，扣掉六對頂點，$VV', WW', UU' \cdots$還剩下 8 個頂點，A、B、C、D是其中四個，B、C這邊有另外兩個與B、C構成正方形。A、D這邊也有另外兩個與A、D構成正方形。總共 8 個頂點，構成六個正方形，也構成正六面體。

以上的分析，當然是先假設了正十二面體的存在，接下來就要利用正六面體來往各個面的方向，向外搭出正十二面體，方法如下：

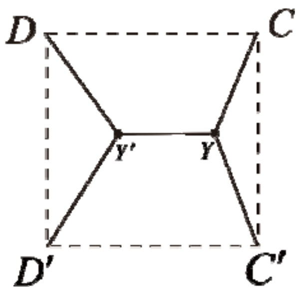


圖三

圖中$ABCD$是一個正方形，由正五邊形的性質知$\angle DCV' = 36°$，$\angle BCV' = 72°$，而$90° < 36° + 72° < 180°$，所以可以向中間的方向搭四個面：面CDV'，面$DV'VA$，面$CV'VB$，面ABV。（註二）

在六個全等的正方形上各自搭好了圖三之後，下一步要把它們安裝起來。

我們看以$\overline{CD}$為一邊的另一個正方形上的圖三，如圖四所示：



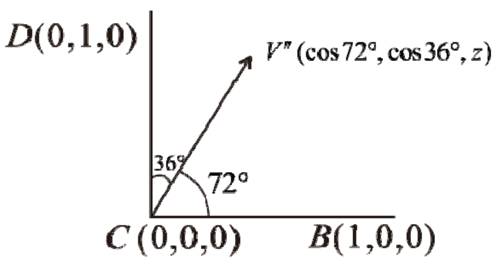
圖四

安裝的時候平面$C'D'DC$要和平面$ABCD$垂直並且沿CD邊貼齊。貼齊並垂直的時候,必須同時保證平面CDV'和平面$CDY'Y$是同一個平面(否則$V'DY'YC$無法構成一個面)。

為了保證這件事，需要證明：

（平面CDV'和平面$ABCD$的兩面角稱為α）加上（平面$CV'VB$和平面$ABCD$的兩面角稱為β）等於$90°$。

我們利用坐標幾何，如圖五，令C為原點，B在x-軸，D在y-軸方向。



圖五

在$\overline{CV'}$方向有一單位向量CV'' $(\cos 72°, \cos 36°, z)$，其中

$z^2 + \cos^2 72° + \cos^2 36° = 1, z > 0$。

先看平面CDV''和平面BCD的兩面角,如圖六V''到XY平面的投影是F，F到$\overline{CD}$的垂足是E，則$V''E \perp CD$（此即三垂線定理),而$\angle V''EF$正是兩面角α，所以

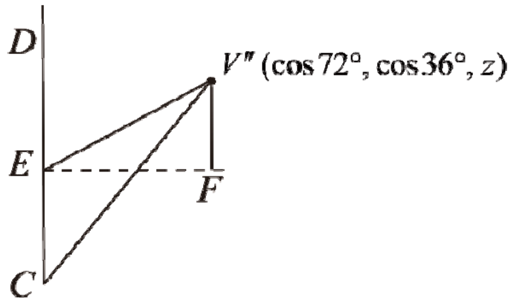
$$\sin\alpha = z / \sqrt{\cos^2 72° + z^2}$$

$$\cos\alpha = \cos 72° / \sqrt{\cos^2 72° + z^2}$$

同理

$$\sin\beta = z/\sqrt{\cos^2 36^\circ + z^2}$$

$$\cos\beta = \cos 36^\circ/\sqrt{\cos^2 36^\circ + z^2}$$



圖六

現在要證$\alpha+\beta=90^\circ$，計算

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{\cos 36^\circ\cos 72^\circ}{\sqrt{\cos^2 36^\circ+z^2}\sqrt{\cos^2 72^\circ+z^2}}-\frac{z^2}{\sqrt{\cos^2 36^\circ+z^2}\sqrt{\cos^2 72^\circ+z^2}}$$

希望$\cos(\alpha+\beta)=0$，或$z^2=\cos 36^\circ\cos 72^\circ$，或
$1-\cos^2 36^\circ-\cos^2 72^\circ=\cos 36^\circ\cos 72^\circ$

將$\cos 72^\circ=\sin 18^\circ$以$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\cos 36^\circ$以$\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$代入

$$\cos^2 36^\circ+\cos^2 72^\circ+\cos 36^\circ\cos 72^\circ=(\cos 36^\circ+\cos 72^\circ)^2-\cos 36^\circ\cos 72^\circ$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=1$$

符合所求。（註三）

最後補充一點，因為$\cos\alpha(\cos\beta)$是透過正整數的加、減、乘、除和開平方根得到的，所以是一個尺規數，即可以用尺規作圖得到角度$\alpha(\beta)$。

另外，把正十二面體和正六面體關聯了以後，許多有關正十二面體的計算都可以透過正六面體，因此變得簡單。

註一. 這個想法，來自於歐幾里得《原本》第十三卷命題十七：求作已知球的內接正十二面體，但是《原本》寫得太過複雜，不易閱讀，因此引發作者寫本文的動機。

請參考 Benno Artmann：Euclid－The Creation of Mathematics 或 Google”Construction of Dodecahedron”

註二. 如果以 C 為頂點，$\overline{CD}$ 為軸作一錐面角為 $36°$ 的角錐，又同樣以 C 為頂點，$\overline{CB}$ 為軸作一錐面角為 $72°$ 的角錐，這兩個角錐的交線在 $ABCD$ 上方的部份構成 CV'。以此類推得到 DV', AV, BV，再連接 VV'。當然，歸根結底是要能搭出平面 CDV' 和平面 $CV'VB$，或是要能夠說明它們與平面 $ABCD$ 所夾的兩面角或這些兩面角的餘弦值，這些都會在本文仔細討論。

註三. 圖三搭出來四個“半”五邊形，六個圖三相當 $4\times\dfrac{6}{2}=12$ 個正五邊形。