2023 年亞太數學奧林匹亞初選考試（二）試題

比賽日期：2023 年 2 月 1 日

時間限制：四小時 (9:30–13:30)
除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫。答案不得以修正液 (帶) 修正。
計算紙必須連同試卷交回。不得使用計算器。
本試卷共五題, 每題滿分七分

問題一. 已知正整數 n 可以被寫成若干個正整數的乘積，且這若干個正整數的和為 2023。試求 n 的最大可能值。

問題二. 請找出 $x^3 + y^3 - 12xy = 13$ 的所有正整數解 x, y。

問題三. 五十張卡片上各寫了 1 或 -1 的其中一個數字。你每次可以選擇三張卡片，並獲知此三張卡片上數字的乘積。試求最小的正整數 n，使得你存在一個策略，能保證在至多 n 次問題後得知全部卡片上的數字總乘積？

問題四. 數列 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 滿足：

$$a_1 = 1, \quad a_{k+1} = \frac{a_k}{1+a_k^2}, \quad k \geq 1. \tag{$\star$}$$

令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$。

(i) 證明：存在兩個正數 $C_1 < C_2$，使得

$$C_1 \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq C_2 \tag{$\star\star$}$$

對所有的正整數 n 都成立。

(ii) 試求 S_{2n^2+3n} 的整數部分 (以 n 的函數表示)。

問題五. 平面上有一點 A 在圓 ω 上，另有一點 X 在圓 ω 外。過點 X 作一直線 ℓ，設 ℓ 與 ω 交於兩點 B, C。令點 H 爲三角形 ABC 的垂心。試證：平面上存在一點 Y，滿足 $HA^2 + HY^2$ 爲一個與直線 ℓ 無關的定值。

2023 年亞太數學奧林匹亞初選考試（二）試題詳解暨評分標準

問題一. 已知正整數 n 可以被寫成若干個正整數的乘積，且這若干個正整數的和為 2023。試求 n 的最大可能值。

解. 答案是 $2^2 \times 3^{673}$。以下對任何向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$，令 $P(\vec{a}) = \prod a_i$, $S(\vec{b}) = \sum a_i$。

假設最大的 $n = P(\vec{a})$ 對應 $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$，已知 $S(\vec{a}) = 2023$。

1. 首先注意到，若有任何 $a_k > 4$，則考慮 $\vec{b} = (a_1, \cdots, a_{k-1}, 2, a_k - 2, a_{k+1}, \cdots, a_m)$，易知 $S(\vec{b}) = 2023$，且因為 $2(a_k - 2) = a_k + (a_k - 4) > a_k$，有 $P(\vec{b}) > P(\vec{a})$，與 n 的最大性矛盾。故 $a_k \in \{1, 2, 3, 4\}$ 對於所有 k 都成立。
2. 假設有 $a_k = 1$，考慮 $\vec{b} = (a_1, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1} + 1, \cdots, a_m)$，則易知 $S(\vec{b}) = 2023$，且因為 $a_{k+1} + 1 > 1 \times a_{k+1} = a_k a_{k+1}$，有 $P(\vec{b}) > P(\vec{a})$，與 n 的最大性矛盾。故 $a_k \in \{2, 3, 4\}$ 對於所有 k 都成立。
3. 假設有 $a_k = 4$，考慮 $\vec{b} = (a_1, \cdots, a_{k-1}, 2, 2, a_{k+1} + 1, \cdots, a_m)$，則易知 $S(\vec{b}) = 2023$，且因為 $2 \times 2 = 4 = a_k$，有 $P(\vec{b}) = P(\vec{a})$。故我們可以不失一般性假設 $a_k \in \{2, 3\}$ 對於所有 k 都成立。
4. 現在，若 $\vec{a}$ 中有三個 2，將三個 2 換成兩個 3，總和不變但乘積變大（因為 $2^3 < 3^2$），再次與 n 的最大性不合，因此 $\vec{a}$ 至多只有兩個 2。

綜以上以及 $S(\vec{a}) = 2023$ 的條件，知 $\vec{a}$ 為兩個 2 與 673 個 3。證畢。

Marking scheme

問題二. 請找出 $x^3+y^3-12xy=13$ 的所有正整數解 x, y。

解. Standard and easy problem that use factorization method to solve the equation.

Reformulate the equation into $(x+y+4)(x^2+y^2+16-xy-4x-4y)=77$

So $x+y+4$ can only be $7, 11, 77$.

Since

$$(x+y+4)((x+y+4)^2-3xy-12x-12y)=(x+y+4)(x^2+y^2+16-xy-4x-4y)=77.$$

By modulo 3, easy to see that $x+y+4 \neq 7$.

When $x+y+4=77$, we have $xy=(77^2-12\cdot(77-4)-1)/3>40^2>(73/2)^2$, which is impossible.

We must have $x+y+4=11$. Thus, easy to check that $x, y=5, 2$ or $2, 5$

有很多不同的做法，也可以壓個界，慢慢檢驗。

Marking scheme

問題三. 五十張卡片上各寫了 1 或 -1 的其中一個數字。你每次可以選擇三張卡片，並獲知此三張卡片上數字的乘積。試求最小的正整數 n，使得你存在一個策略，能保證在至多 n 次問題後得知全部卡片上的數字總乘積？

解. I claim that it takes a minimum of 18 questions.

First, a construction for 18 questions. Take 16 disjoint groups of 3 numbers each, and find the product of the numbers in each group. That gives you the product of $3 \cdot 16 = 48$ of the numbers. To find the product of the last two numbers (say x and y), take two groups, $\{a_1, a_2, x\}$ and $\{a_1, a_2, y\}$ and find their product. If the product is the same, then $x = y$, and $xy = 1$. If the products are different, then $x = -y$, and $xy = -1$. Therefore, the product of 16 disjoint groups of 3 numbers are found, and also the product of the last two numbers, so the total product is found by multiplying all of these products.

Now to show that 18 is indeed a minimum. Say a number is "evidenced" if there exists a set with a known product that contains that number, that is, one of the questioned products contains that number. Since all of the numbers are independent, every number needs to be evidenced at least once to find the total product. Clearly there needs to be more than 16 questions, since per question we can only evidence a maximum of 3 numbers. Thus it remains to show that 17 questions cannot determine the total product.

Suppose, on the contrary, that there exist 17 questions that give the total product. Since there are only 50 elements, at least one element must be evidenced more than once. If more than one element is evidenced more than once, then there would be less than 50 total numbers evidenced. By similar logic, that one element must be evidenced exactly twice.

Therefore, if such 17 questions exist, there must be 16 subsets with 3 elements questioned, along with one more subset that has exactly one element in common with one of the 16 subsets. Let the two nondisjoint subsets be $\{a_1, a_2, x\}$ and $\{a_3, a_4, x\}$. Since the total product is determined, and the other subsets are disjoint so that their product is determined, the product of the union of these two sets must be determined.

Therefore, we must be able to determine the product of these two sets, that is, the value of $a_1a_2a_3a_4x$ must be determined from the products a_1a_2x and a_3a_4x. However, if $x = 1$, then the product of the union is equal to the product of the two subsets, but if $x = -1$, then the product of the union is equal to the negative product of the two subsets, and since the value of x clearly cannot be determined from the given products, it must be impossible to find the product of all of the elements with only 17 questions.

Therefore, there is a minimum of 18 questions that need to be asked to find the product of all of the elements.

Marking scheme

問題四. 數列 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 滿足：

$$a_1 = 1, \quad a_{k+1} = \frac{a_k}{1+a_k^2}, \quad k \geq 1. \tag{$\star$}$$

令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$。

(i) 證明：存在兩個正數 $C_1 < C_2$，使得

$$C_1 \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq C_2 \tag{$\star\star$}$$

對所有的正整數 n 都成立。

(ii) 試求 S_{2n^2+3n} 的整數部分 (以 n 的函數表示)。

解. 首先，由原題第一式可得到

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) = \frac{1}{a_{n+1}} - 1. \tag{1}$$

再由原題第一式及(1)我們有

$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{S_{n-1}+1} \quad (n \geq 2). \tag{2}$$

$\boxed{\text{(i) 部分}}$ 以下提供 (i) 的兩種證明方法。

(數歸)： 先證明

$$a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}, \quad \text{for } n \geq 2. \tag{3}$$

Proof. 當 $n = 2$ 時，$a_2 = \frac{1}{2}$ 成立。假設(3)對某個 $m \geq 2$ 成立, 則由原題第一式我們有 $a_{m+1} = 1/(a_m + \frac{1}{a_m}) \leq 1/(\frac{1}{\sqrt{2m}} + \sqrt{2m}) = \frac{\sqrt{2m}}{2m+1} < \frac{1}{\sqrt{2m+2}}$. 這裡我們用到函數 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在區間 $(0,1)$ 是嚴格遞減的。因此，我們推得當 $n = m+1$ 時，(3)也成立。由數歸得證。 □

由原題第一式及(3)我們可得到 $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{2k}{2k+1}$ 對所有 $k \geq 2$ 都成立。這給出

$$\begin{aligned} & \frac{a_{n+1}}{a_2} \geq \frac{4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+1)} \\ \Longrightarrow & \left(\frac{a_{n+1}}{a_2}\right)^2 \geq \frac{4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+1)} \times \frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{4\cdot 6\cdots(2n)} = \frac{3}{2n+1} \\ \Longrightarrow & \qquad a_n \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2n-1}}, \qquad n \geq 2. \end{aligned} \tag{4}$$

顯然，由(1)及 (3)–(4), 我們得到原題 (i) 式, C_j's 只須從(3)、(4)對應的係數作適當調整即可。

(遞迴估計)：由(2)得到

$$(1+S_n)^2 = \left(1+S_{n-1}+\frac{1}{1+S_{n-1}}\right)^2 = (1+S_{n-1})^2 + 2 + \frac{1}{(1+S_{n-1})^2}.$$

Step 1. (下界). 由上式可得到 $(1+S_n)^2 > (1+S_{n-1})^2 + 2$. 因此，我們有 $(1+S_n)^2 > (1+S_1)^2 + 2(n-1) = 2n+2$. 結合 $S_1 = 1$ 得到

$$S_n \geq \sqrt{2n+2} - 1 > \geq \sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Step 2. (上界). 由上一步估計我們可得到 $(1+S_n)^2 < (1+S_{n-1})^2 + 2 + \frac{1}{2n+2}$. 故

$$\begin{aligned}(1+S_n)^2 <& (1+S_1)^2 + 2(n-1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k+2} \\ &< 2n+2+\frac{1}{2}\ln(n+2) < \frac{5}{2}(n+1) \Longrightarrow S_n < \sqrt{5n}.\end{aligned} \tag{5}$$

故原題 (i) 式得證。

$\boxed{\text{(ii) 部分:}}$ **答案爲 2n**。我們先給出 $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{2k+2}$ 一個『更適當的』估計：

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k+2} < \log_2 \sqrt{n} \quad (n \geq 2). \tag{6}$$

Proof. 令 $\alpha \in \mathbb{N}$ 使得 $2^\alpha \leq n < 2^{\alpha+1}$. 顯然有 $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{2k+2} < \frac{\alpha}{2} \leq \log_2 \sqrt{n}$. □

由 Step 1 得到 $S_{2n^2+3n} \geq \sqrt{4n^2+6n+2} - 1 > 2n$. 另外，由 (5)–(6)得到

$$\begin{aligned}(1+S_{2n^2+3n})^2 <& (1+S_1)^2 + 2(2n^2+3n-1) + \sum_{k=2}^{2n^2+3n} \frac{1}{2k+2} \\ <& 4n^2+6n+2+\log_2\sqrt{2n^2+3n} \\ <& (2n+2)^2.\end{aligned}$$

因此我們得到 $2n < S_{2n^2+3n} < 2n+1$, 故 S_{2n^2+3n} 的整數部分爲 $2n$.

Marking scheme

原出題者建議 (i)4 分 (ii)3 分。

問題五. 平面上有一點 A 在圓 ω 上，另有一點 X 在圓 ω 外。過點 X 作一直線 ℓ，設 ℓ 與 ω 交於兩點 B, C。令點 H 爲三角形 ABC 的垂心。試證：平面上存在一點 Y，滿足 $HA^2 + HY^2$ 爲一個與直線 ℓ 無關的定值。

解. 設直線 AH 與 BC 交於點 D，且 AH 與 ω 交於點 Z。由於 $\angle ADX = 90^\circ$，故 D 落在以 AX 爲直徑的圓 ω' 上。

計算點 H 對圓 ω, ω' 的冪，可得

$$\frac{P(H,\omega)}{P(H,\omega')} = \frac{HA \cdot HX}{HA \cdot HD} = \frac{HX}{HD} = 2,$$

此爲定比。故點 H 落在某個與圓 ω, ω' 共軸的圓 o 上。因爲 ω, ω', o 共軸，所以點 A 也在圓 o 上。

令點 Y 爲 A 在圓 o 上的對徑點。因爲 $\angle AHT = 90^\circ$，所以 $HA^2 + HY^2 = AY^2$ 爲與 ℓ 無關的定值。

Marking scheme