四邊形面積之旅

國立蘭陽女中數學教師

陳敏晧

一、楔子

111 學年度高中數學學科能力競賽花蓮區填充題第 5 題:

設四邊形有一外接圓且有一內切圓，其四邊邊長分別為 42,54,78,66。若最長邊被內切圓的切點分成長度為 x,y 兩線段，則數對$(x,y)=$ ＿＿＿＿＿ 。

這個問題讓我心中產生很大的漣漪，當然也花了一點力氣才解出來，回想當年我曾經幫台大科學教育發展中心(CASE)寫過一篇《數學之旅：三角形面積公式》截至目前為止有 100592 人看過，因此，看起來對面積有興趣的人真不少，本文僅討論凸四邊形(convex quadrilateral)的面積公式。

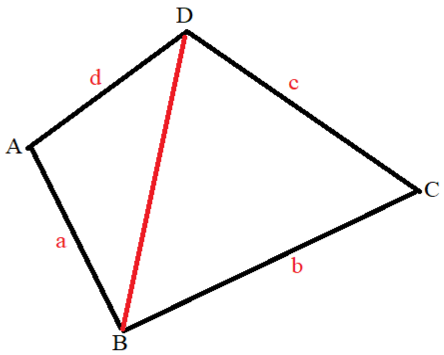
二、布雷特施奈德公式(Bretschneide formula)

此公式由布雷特施奈德 (1808~1878)於 1842 年提出，適用於一般四邊形。[1]

已知：四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=a,\overline{BC}=b,\overline{CD}=c,\overline{DA}=d,s=\frac{a+b+c+d}{2}$，令四邊形 ABCD 面積為 K，如圖一。

求證: $K=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)}$

證明:



圖一

連結對角線$\overline{BD}$，利用三角形面積公式:

[1]文章出現在 *Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik*, vol. 2(1842) 132-145。布雷特施奈德公式就是公元七世紀婆羅摩笈多公式(Brahmagupta formula)的推廣。

$$K = a\Delta ABD + a\Delta CBD = \frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bc\sin C$$

再利用餘弦定理:

$\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$

整理得

$$\begin{cases} ad\sin A + bc\sin C = 2K ---------(1) \\ ad\cos A - bc\cos C = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2} ----(2) \end{cases}$$

由$(1)^2 + (2)^2$得

$$4K^2 + \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2$$

$$= (ad\sin A + bc\sin C)^2 + (ad\cos A - bc\cos C)^2$$

$$= (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd(\cos A\cos C - \sin A\sin C)$$

$= (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd\cos(A + C)$，二倍角公式$\cos(A + C) = 2\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right) - 1$

$$= (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd\left[2\cos^2\left(\frac{A + C}{2}\right) - 1\right]$$

$$= (ad + bc)^2 - 4abcd\cos^2\left(\frac{A + C}{2}\right)$$

接著移項得

$$4K^2 = (ad + bc)^2 - \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2 - 4abcd\cos^2\left(\frac{A + C}{2}\right)$$

$$= \left[(ad + bc) + \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2}\right]\left[(ad + bc) - \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2}\right] - 4abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}[(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2] - 4abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(a + b - c + d)(a - b + c + d)(a + b + c - d)(-a + b + c + d) - 4abcd\cos^2\left(\frac{A + C}{2}\right)$$

仿照海龍公式(Heron's Formula)，令 $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ (周長之半)

$4K^2 = \frac{1}{4}(2s - 2c)(2s - 2b)(2s - 2d)(2s - 2a) - 4abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$，左右同除 4

$$K^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd\cos^2\left(\frac{A + C}{2}\right)$$

得四邊形 ABCD 面積為 K= $\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)}$，若

四邊形 ABCD 為圓內接四邊形，因為對角互補，得$\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)=\cos 90^0=0$，可得婆羅摩笈多公式(Brahmagupta formula)：

四邊形 ABCD 面積 K= $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$。

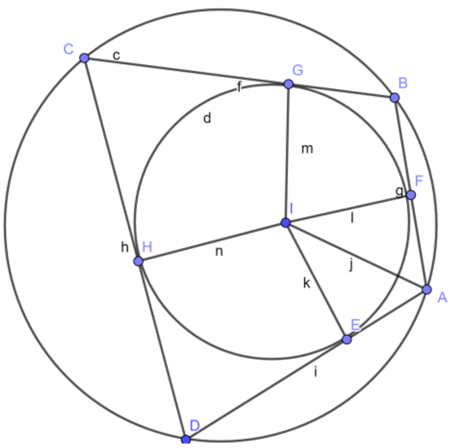
若$d=0$，則四邊形(Quadrilateral)將退化成三角形(Triangle)，

可得$a\Delta ABC=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-0)-abc\times 0\times\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，即為海龍公式(Heron formula)。

現在我們回到競試問題，如圖二，假設四邊形 ABCD 同時是圓內接四邊形及圓外切四邊形，令邊長 $\overline{AB}=42,\overline{BC}=54,\overline{CD}=78,\overline{DA}=66$ ，所以，

$$a=42,b=54,c=78,d=66,s=\frac{a+b+c+d}{2}=\frac{42+54+78+66}{2}=120，$$



圖二

又四邊形 ABCD 為圓內接四邊形，因此， $\angle BAD+\angle BCD=180^0$ 。

即四邊形 ABCD 面積= $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\left(\frac{180^0}{2}\right)}$

$$=\sqrt{(120-42)(120-54)(120-78)(120-66)}$$
$$=\sqrt{78\times 66\times 42\times 54}$$
$$=108\sqrt{1001}$$
，其中 r 為內切圓半徑
$$=sr$$
$$=120r$$

即$r=\overline{IE}=\overline{IF}=\dfrac{9\sqrt{1001}}{10}$ ，接著使用餘弦定理：令 $\angle BAD=2\theta$

$\overline{BD}^2=42^2+66^2-2\times42\times66\times\cos2\theta$
$=54^2+78^2-2\times54\times78\times\cos(180^0-2\theta)$ 得 $\cos2\theta=-\dfrac{20}{97}$，再利用二倍角公式

$\because 2\cos^2\theta-1=-\dfrac{20}{97}$，整理得 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{77}}{\sqrt{194}}$，

易得 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{117}}{\sqrt{77}}=\tan\angle IAE=\dfrac{r}{\overline{AE}}=\dfrac{\frac{9\sqrt{1001}}{10}}{\overline{AE}}$，即 $\overline{AE}=\dfrac{231}{10}$

又 $\overline{DH}=\overline{DE}=66-\dfrac{231}{10}=\dfrac{429}{10}$，最後 $\overline{CH}=78-\dfrac{429}{10}=\dfrac{351}{10}$，因此，

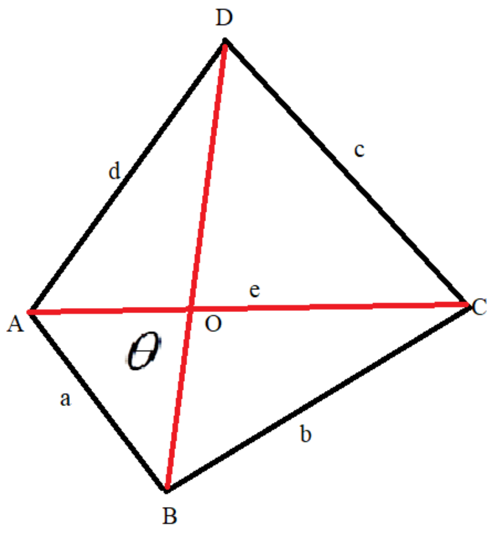
數對 $(x,y)=\left(\dfrac{429}{10},\dfrac{351}{10}\right),\left(\dfrac{351}{10},\dfrac{429}{10}\right)$。

三、柯尼茲公式(Coolidge formula)及其推廣公式

接續布雷特施奈德公式的證明，令 $\overline{AC}=e,\overline{BD}=f$。

求證:$K=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-\frac{1}{4}[(ac+bd)^2-(ef)^2]}$如圖三。

證明:



圖三

利用餘弦定理：$a^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\theta$，移項得如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2}=\dfrac{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-a^2}{4\cos\theta}---(3)\\ \dfrac{\overline{OB}\cdot\overline{OC}}{2}=-\dfrac{\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-b^2}{4\cos\theta}--(4)\\ \dfrac{\overline{OC}\cdot\overline{OD}}{2}=\dfrac{\overline{OC}^2+\overline{OD}^2-c^2}{4\cos\theta}---(5)\\ \dfrac{\overline{OD}\cdot\overline{OA}}{2}=-\dfrac{\overline{OD}^2+\overline{OA}^2-d^2}{4\cos\theta}--(6)\end{cases}$$

由$(3)+(4)+(5)+(6)$:

$\dfrac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OC})(\overline{OB}+\overline{OD})=\dfrac{b^2+d^2-(a^2+c^2)}{4\cos\theta}$，即$\cos\theta=\dfrac{b^2+d^2-(a^2+c^2)}{2ef}$

因為$K=\dfrac{1}{2}ef\sin\theta$(在文章第四段有證明)，得

$$K^2=\frac{e^2f^2}{4}\sin^2\theta=\frac{e^2f^2}{4}(1-\cos^2\theta)=\frac{e^2f^2}{4}\left[1-\left(\frac{b^2+d^2-(a^2+c^2)}{2ef}\right)^2\right]---\otimes$$

$$=\frac{1}{16}\left[-(a^4+b^4+c^4+d^4)+2(a^2+c^2)(b^2+d^2)-2(a^2c^2+b^2d^2)\right]+\frac{e^2f^2}{4}{}^2$$

$$=\frac{1}{16}\left[-(a^4+b^4+c^4+d^4)+2(a^2+c^2)(b^2+d^2)+2(a^2c^2+b^2d^2)+8abcd\right]$$

$$-\frac{1}{4}(\mathrm{a}^2\mathrm{c}^2+\mathrm{b}^2\mathrm{d}^2+2\mathrm{abcd}-\mathrm{e}^2\mathrm{f}^2)$$

$$=\frac{1}{16}\left[-\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+2(a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2+a^2b^2+c^2d^2)+8abcd\right]$$

$$-\frac{1}{4}\left[(ac+bd)^2-e^2f^2\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[2(a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2)-(a^4-2a^2b^2+b^4)-(c^4-2c^2d^2+d^4)\right]$$

$$-\frac{1}{4}(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)$$

$$=\frac{1}{16}\left[2(ac+bd)^2+2(ad+bc)^2-\left(a^2-b^2\right)^2-(c^2-d^2)^2\right]$$

$$-\frac{1}{4}(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)$$

[2] 請注意 J. L. Coolidge, A historically interesting formula for the area of a quadrilateral, *Amer. Math. Monthly*, 46(1939)345-347.文章中第 347 頁由上而下第四行的性質符號需要更正。另外，文章中對此頁的因式分解過程付之闕如。

$$=\frac{1}{16}\left\{\left[(ac+bd)+(ad+bc)\right]^2+\left[(ac+bd)-(ad+bc)\right]^2-(a^2-b^2)^2-(c^2-d^2)^2\right\}$$
$$-\frac{1}{4}(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)$$

$$=\frac{1}{16}\left[(a+b)^2(c+d)^2+(a-b)^2(c-d)^2-(a+b)^2(a-b)^2-(c+d)^2(c-d)^2\right]$$
$$-\frac{1}{4}(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)$$

$$=\frac{1}{16}\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-(c-d)^2\right]-\frac{1}{4}(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)$$

$$=\frac{1}{16}(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$$
$$-\frac{1}{4}(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)$$

$$=\frac{1}{16}(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)-\frac{1}{4}(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)$$

$$=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-\frac{1}{4}\left[(\mathrm{ac}+\mathrm{bd})^2-(\mathrm{ef})^2\right]$$

得$\mathrm{K}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-\frac{1}{4}[(ac+bd)^2-(ef)^2]}$

至於等價證明 $\mathrm{K}=\frac{1}{4}\sqrt{(2ef)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$

由上頁的⊗可知：

$K^2=\frac{1}{16}\left[4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2\right]$，開平方得

$K=\frac{1}{4}\sqrt{(2ef)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$ 。

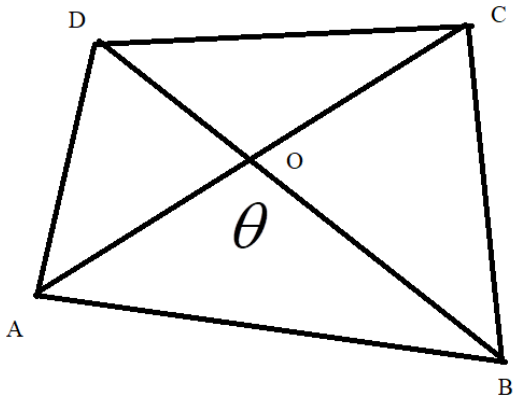
四、給定兩對角線長度及夾角的四邊形面積

已知：四邊形 ABCD，其中 $\overline{AC}=e,\overline{BD}=f$ ，兩對角線的一夾角為 θ ，如圖四。

求證：四邊形 ABCD 面積為 $\frac{1}{2}ef\sin\theta$ 。

證明：四邊形 ABCD 面積為

$$
\begin{aligned}
&= a\Delta AOB + a\Delta BOC + a\Delta COD + a\Delta DOA \\
&= \frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\sin\theta + \frac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{OC}\cdot\sin(\pi-\theta) + \frac{1}{2}\overline{OC}\cdot\overline{OD}\cdot\sin\theta + \frac{1}{2}\overline{OD}\cdot\overline{OA}\cdot\sin(\pi-\theta) \\
&= \frac{1}{2}\sin\theta\left(\overline{OA}\cdot\overline{OB} + \overline{OB}\cdot\overline{OC} + \overline{OC}\cdot\overline{OD} + \overline{OD}\cdot\overline{OA}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin\theta\left[\overline{OB}(\overline{OA}+\overline{OC}) + \overline{OD}(\overline{OA}+\overline{OC})\right] \\
&= \frac{1}{2}\sin\theta\cdot\overline{AC}\cdot(\overline{OB}+\overline{OD}) \\
&= \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BD}\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}ef\sin\theta
\end{aligned}
$$



圖四

另外，道格拉斯・米契爾的文章中，[3]他在柯尼茲公式的基礎上將此面積公式做了進一步延伸，因為 $K=\frac{1}{4}\sqrt{(2ef)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$ ，又 $K=\frac{1}{2}ef\sin\theta$

得 $\frac{1}{4}\sqrt{(2ef)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}=\frac{1}{2}ef\sin\theta$ ，左右平方得

$\frac{1}{16}\left[4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2\right]=\frac{1}{4}e^2f^2\sin^2\theta$ ，整理得

$4e^2f^2(1-\sin^2\theta)=(a^2-b^2+c^2-d^2)^2$ ，即

$4e^2f^2=\dfrac{a^2-b^2+c^2-d^2}{\cos^2\theta}=(a^2-b^2+c^2-d^2)\sec^2\theta$ 代回

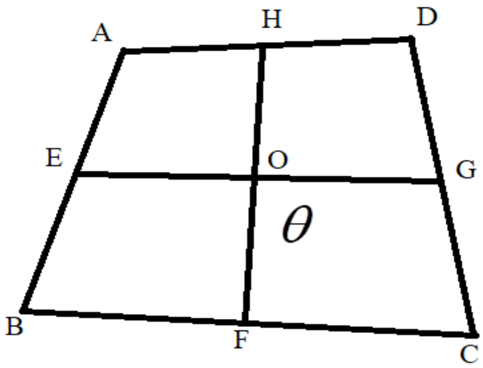
$$K=\frac{1}{4}\sqrt{(2ef)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2(\sec^2\theta-1)}$$

[3] Mitchell, Douglas W., "The area of a quadrilateral," Mathematical Gazette, 93(July 2009)306–309.

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2\tan^2\theta}=\frac{|\tan\theta|}{4}\left|a^2-b^2+c^2-d^2\right|$$ 。

五、給定兩對邊中點連線長度及其夾角的四邊形面積

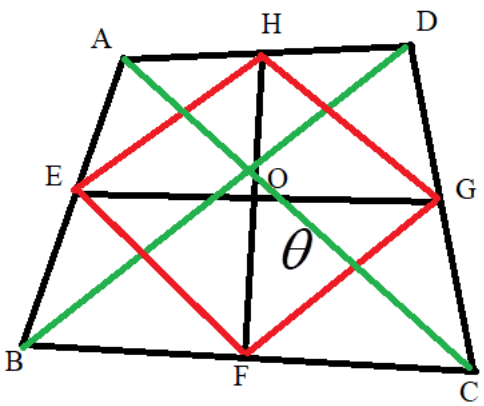
已知：四邊形 ABCD 中，E,F,G,H 分別為 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DA}$ 的中點，且兩中線 $\overline{EG},\overline{FH}$ 的一夾角為 θ，令 $\overline{EG}=x,\overline{FH}=y$，如圖五。



圖五

求證：四邊形 ABCD 面積為 $xy\sin\theta$ 。

證明:假設四邊形 ABCD 面積為 k，如圖六。



圖六

$$k=(a\Delta EOF+a\Delta FOG+a\Delta GOH+a\Delta HOE)+(a\Delta AEH+a\Delta BEF+a\Delta CFG+a\Delta GDH)$$
$$=\frac{1}{2}\overline{EG}\cdot\overline{FH}\sin\theta+\frac{1}{4}a\Delta ABD+\frac{1}{4}a\Delta ABC+\frac{1}{4}a\Delta BCD+\frac{1}{4}a\Delta ACD$$
$$=\frac{1}{2}xy\sin\theta+\frac{1}{4}(a\Delta ABD+a\Delta BCD)+\frac{1}{4}(a\Delta ABC+a\Delta ACD)$$
$$=\frac{1}{2}xy\sin\theta+\frac{1}{4}k+\frac{1}{4}k$$

移項得$\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}xy\sin\theta$，因此，四邊形 ABCD 面積為$k=xy\sin\theta$，得證。

六、從三角形面積延伸到四邊形面積

6.1、鞋帶公式(Shoelace formula)

當四邊形面積旅程來到向量(vector)，我們先導出三角形的向量面積公式。

求證: $a\Delta ABC=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overline{AB}\right|^2\cdot\left|\overline{AC}\right|^2-\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right)^2}$ 。

證明：因為$a\Delta ABC=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|\sin\mathrm{A}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overline{AB}\right|^2\left|\overline{AC}\right|^2\sin^2 A}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overline{AB}\right|^2\left|\overline{AC}\right|^2(1-\cos^2\mathrm{A})}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overline{AB}\right|^2\left|\overline{AC}\right|^2-\left(\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|\cos A\right)^2}$$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overline{AB}\right|^2\left|\overline{AC}\right|^2-\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right)^2}$，這個面積公式可以適用於平面幾何與空間幾何。

進一步延伸，若在座標平面上，令$\overline{AB}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$、$\overline{AC}=(\mathrm{c},\mathrm{d})$，則三角形面積公式

轉換成$a_{\Delta}ABC=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overline{AB}\right|^2\left|\overline{AC}\right|^2-\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)-\left(ac+bd\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\mathrm{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2})-(\mathrm{a^2c^2+2acbd+b^2d^2})}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2d^2-2adbc+b^2c^2}$$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(ad-bc\right)^2}=\frac{1}{2}\left|ad-bc\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}a & b\\ c & d\end{matrix}\right\|$。其中行列式$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$。

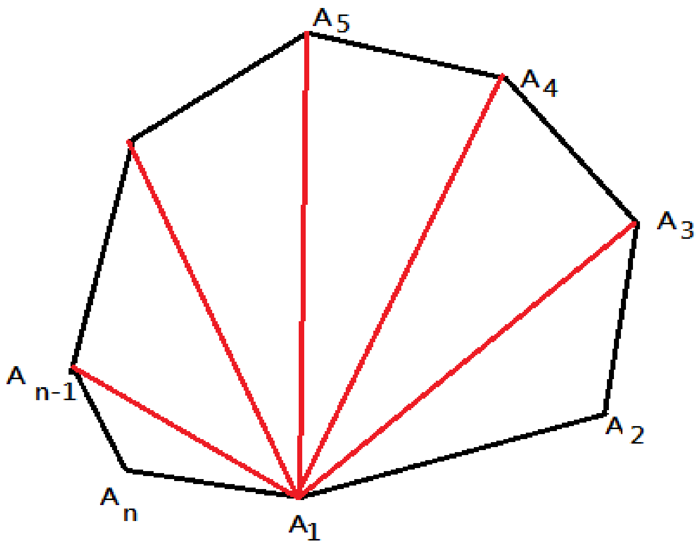
透過平面三角形面積公式及利用行列式的性質，我們可以進一步將平面三點面積轉換：若$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，則$a_{\Delta}ABC=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_1\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1\end{matrix}\right\|$，

這個神奇的公式可以推廣到 n 多邊形，若其點座標分別為

$A_1(x_1,y_1),\mathrm{A}_2(x_2,y_2),\mathrm{A}_3(x_3,y_3),A_4(\mathrm{x}_4,\mathrm{y}_4),\mathrm{A}_5(\mathrm{x}_5,\mathrm{y}_5),\ldots,\mathrm{A}_n(\mathrm{x}_n,\mathrm{y}_n)$，此時，n 多

邊形的面積為$\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & \cdots & y_n & y_1 \end{Vmatrix}$，這個公式很類似綁鞋帶的過程，只要將多邊形的座標不斷地交叉相乘而得，因此，又被稱為鞋帶公式(Shoelace formula)或稱為高斯面積公式。[4]此公式常用於測量，所以，又常被稱為測量員公式。如圖七所示，讀者可以想像將 n 多邊形的圖形從頂點 A 出發，畫出對角線$\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4},\overline{A_1A_5},\ldots,\overline{A_1A_{n-1}}$，因此，如圖六，得 n 多邊形的面積為

$$\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & \cdots & y_n & y_1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n-1}\det\begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{pmatrix}\right|。$$



圖七

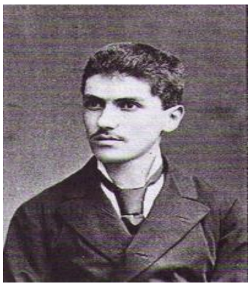
因此，若平面上依序(順時針或逆時針)四點$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，則四邊形 ABCD 面積為$\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{Vmatrix}$。

6.2、皮克公式(Pick formula)

最後，我們談一個有趣的三角形公式－Pick 公式，它是在 1899 由奧地利數學家皮克(George Alexander Pick, 1859-1943)所提出的，如圖八，他在 1880 年獲得博士學位，1884 年在萊比錫大學(University of Leipzig)與德國數學家克萊因(Felix Christian Klein, 1849-1925)共事。皮克領導布拉格大學的委員會，此委員會於 1911 年任命愛因斯坦(Albert Einstein,1879-1955)為數學物理系主任。他向

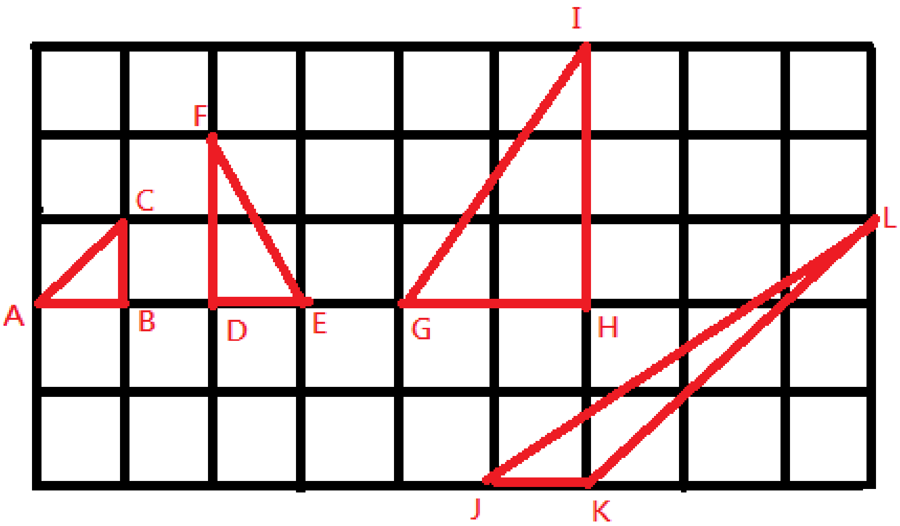
[4] 此部分內容引用與改寫自陳敏晧，《數學之旅：三角形面積公式》，台大科學教育發展中心。

愛因斯坦推薦與介紹兩位義大利數學家格雷戈里奧·裡奇-庫巴斯特羅（Gregorio Ricci-Curbastro, 1853-1925）和圖利奧·列維-奇維塔（Tullio Levi-Civita,1873-1941）在絕對微分學(absolute differential calculus)的工作。這些領域的引進在 1915 年成功幫助愛因斯坦闡述廣義相對論。[5]



圖八取自 https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Alexander_Pick

Pick 公式：若多邊形(polygon)的每一個頂點都是格子點，且 i 為多邊形邊界上格子點個數，j 為多邊形內部格子點個數，則多邊形的面積為 $\frac{i}{2}+j-1$。這個公式簡潔，深獲學生喜歡。以下為不同大小與形狀的三角形。



圖九為各種三角形

$a\Delta ABC=\frac{i}{2}+j-1=\frac{3}{2}+0-1=\frac{1}{2}$。$a\Delta DEF=\frac{i}{2}+j-1=\frac{4}{2}+0-1=1$。

$a\Delta GHI=\frac{i}{2}+j-1=\frac{6}{2}+1-1=3$。$a\Delta JKL=\frac{i}{2}+j-1=\frac{5}{2}+0-1=\frac{3}{2}$。[6]

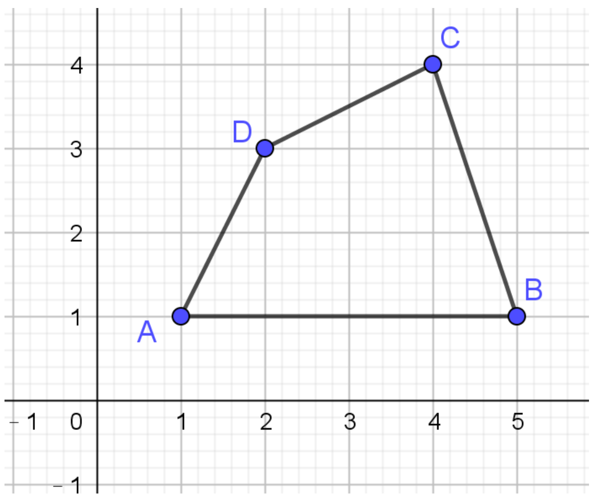
若四邊形 ABCD 中，在平面座標中，$A(1,1),B(5,1),C(4,4),D(2,3)$，如圖十。其中 i 為四邊形邊界上格子點個數，因此 $i=7$；又 j 為四邊形內部格子點個數，因此 $j=5$，透過皮克公式可得四邊形 ABCD 的面積為

[5] 內容改寫自 https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Alexander_Pick.
[6] 此部分內容引用與改寫自陳敏晧，《數學之旅：三角形面積公式》，台大科學教育發展中心。

$\frac{i}{2}+j-1=\frac{7}{2}+5-1=\frac{15}{2}$。

若利用鞋帶公式四邊形 ABCD 的面積為

$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|(-4)+16+4+(-1)\right|=\frac{15}{2}$。



圖十

七、總結

本文從數學學科能力競賽試題出發，研究最著名的四邊形面積公式－布雷特施奈德公式，比較其與婆羅摩笈多公式的差異，討論柯尼茲公式及道格拉斯・米契爾的文章，引入三角函數討論給定兩對角線長度及夾角的四邊形面積及給定兩對邊中點連線長度及其夾角的四邊形面積，再從三角形面積延伸到四邊形面積，推廣鞋帶公式及皮克公式，文中省略特定形狀的四邊形(如正方形、長方形、平行四邊形、梯形等)。四邊形面積公式雖然不若三角形面積公式的多元呈現，但是，數學成份的融入卻是毫不遜色，絕對值得用心研究。

八、參考資料

1.J. L. Coolidge, A historically interesting formula for the area of a quadrilateral, *Amer. Math. Monthly*, 46(1939)345-347.

2.Mitchell, Douglas W., "The area of a quadrilateral," *Mathematical Gazette*, 93(July 2009)306–309.

3.陳敏晧，《數學之旅：三角形面積公式》，台大科學教育發展中心。