# 113 學測數 A 詳解

1. 研究顯示：服用某藥物後，在使用者體內的藥物殘留量隨時間呈指數型衰退。已知在服用某藥物 2 小時後，體內仍殘留有該藥物的一半劑量，試問下列哪一選項正確？

(1) 服用 3 小時後，體內仍殘留有該藥物的$\frac{1}{3}$劑量

(2) 服用 4 小時後，體內仍殘留有該藥物的$\frac{1}{4}$劑量

(3) 服用 6 小時後，體內仍殘留有該藥物的$\frac{1}{6}$劑量

(4) 服用 8 小時後，體內仍殘留有該藥物的$\frac{1}{8}$劑量

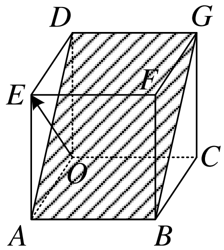
(5) 服用 10 小時後，體內仍殘留有該藥物的$\frac{1}{10}$劑量

答案：(2)

詳解：$n$ 小時後，體內仍殘留有該藥物的$(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}$劑量

只有(2)符合

2. 如圖，$OABC-DEFG$ 為一正方體，試問向量外積 $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AG}$ 與下列哪一個向量平行？




(1) $\overrightarrow{AE}$ (2) $\overrightarrow{BE}$ (3) $\overrightarrow{CE}$ (4) $\overrightarrow{DE}$ (5) $\overrightarrow{OE}$

答案：(5)

詳解：$\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AG}$ 的向量與平面 $ABGD$ 垂直

$\overrightarrow{OE}$ 亦與平面 $ABGD$ 垂直

3. 設 $a\in\{-6,-4,-2,2,4,6\}$，已知 $a$ 為實係數三次多項式 $f(x)$ 的最高次項係數，若函數 $y=f(x)$ 的圖形與 $x$ 軸交於三點，且其 $x$ 坐標成首項為 $-7$、公差為 $a$ 的等差數列。試問共有幾個 $a$ 使得 $f(0)>0$？

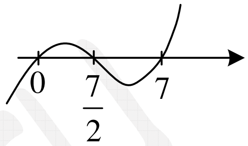
(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個

答案：(1)

詳解：令 $f(x)=a(x+7)(x+7-a)(x+7-2a)$

$f(0)=a(7)(7-a)(7-2a)>0$

$\Rightarrow a(a-7)(2a-7)>0\Rightarrow 0<a<\frac{7}{2}\ or\ a>7$




得 $a=2$

4. 試問有多少個實數 $x$ 滿足 $\sin(x+\frac{\pi}{6})=\sin x+\sin\frac{\pi}{6}$ 且 $0\le x<2\pi$？

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個（含）以上

答案：(2)

詳解：$\sin(x+\frac{\pi}{6})=\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow \sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\sin x+\sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\frac{1}{2}=\sin x+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin x\cdot\sqrt{3}+\cos x=2\sin x+1\Rightarrow(\sqrt{3}-2)\sin x+\cos x=1$

$\Rightarrow(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x+\theta)=1$

左方的振幅為 $\sqrt{6}-\sqrt{2}\approx 2.449-1.414=1.035$ 且週期為 $2\pi$

所以在 $0\le x\le 2\pi$(一週期)的範圍內，有兩個實數解

5. 將 1 到 50 這 50 個正整數平分成甲乙兩組，每組各 25 個數，使得甲組的中位數比乙組的中位數小 1。試問共有幾種分法？

(1) $C^{50}_{25}$ (2) $C^{48}_{24}$ (3) $C^{24}_{12}$ (4) $(C^{24}_{12})^2$ (5) $C^{48}_{24}\cdot C^{24}_{12}$

答案：(4)

詳解：每組的中位數為第 13 個數

可知小於兩中位數的數共有 $12+12=24$ 個

得甲組的中位數為 25，乙組的中位數為 26

將 1 到 24 分成兩組，27 到 50 亦分成兩組

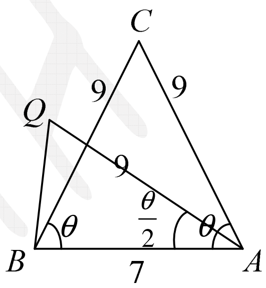
所求為 $(C^{24}_{12}C^{12}_{12})\times(C^{24}_{12}C^{12}_{12})=(C^{24}_{12})^2$

6. 在同一平面上，相距 7 公里的 $A, B$ 兩砲台，$A$ 在 $B$ 的正東方。某次演習時，$A$ 向西偏北 $\theta$ 方向發射砲彈，$B$ 則向東偏北 $\theta$ 方向發射砲彈，其中 $\theta$ 為銳角，觀測回報兩砲彈皆命中 9 公里外的同一目標 $P$。接著 $A$ 改向西偏北 $\dfrac{\theta}{2}$ 方向發射砲彈，彈著點為 9 公里外的點 $Q$。試問砲台 $B$ 與彈著點 $Q$ 的距離 $\overline{BQ}$ 為何？

(1) 4 公里 (2) 4.5 公里 (3) 5 公里 (4) 5.5 公里 (5) 6 公里

答案：(3)

詳解：如圖，$\cos\theta=\dfrac{3.5}{9}=\dfrac{7}{18}$




可得 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{25}{36}}=\dfrac{5}{6}$

$\overline{BQ}^2=9^2+7^2-2\cdot9\cdot7\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}=81+49-126\times\dfrac{5}{6}=25$

$\therefore \overline{BQ}=5$

7. 令坐標平面上滿足 $y=\log x$ 的點 $(x, y)$ 所成圖形為 $\Gamma$，試問滿足下列哪些關係式的 $(x, y)$ 所成圖形與 $\Gamma$ 完全相同？

(1) $y+\dfrac{1}{2}=\log(5x)$ (2) $2y=\log(x^2)$ (3) $3y=\log(x^3)$

(4) $x=10^y$ (5) $x^3=10^{(y^3)}$

答案：(3)(4)

詳解：(1) $y+\dfrac{1}{2}=\log(5x)\Rightarrow y=\log(5x)-\dfrac{1}{2}=\log(5x)-\log10^{\frac{1}{2}}=\log(\dfrac{5}{\sqrt{10}}x)$

(2) $2y=\log(x^2)\Rightarrow 2y=2\log|x|\Rightarrow y=\log|x|$

(3) $3y=\log(x^3)\Rightarrow 3y=3\log x\Rightarrow y=\log x$

(4) $x=10^y\Rightarrow \log x=\log(10^y)\Rightarrow y=\log x$

(5) $x^3=10^{(y^3)}\Rightarrow \log x^3=\log10^{(y^3)}\Rightarrow 3\log x=(y^3)\log10\Rightarrow 3\log x=y^3$

8. 對任一正整數$n \geq 2$，令$T_n$表示邊長為$n, n+1, n+2$的三角形。試選出正確的選項。(註：若三角形的三邊長分別為$a, b, c$，令$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，則三角形面積為$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$)

(1) $T_n$皆為銳角三角形　　(2) $T_2, T_3, T_4, \cdots\cdots, T_{10}$的周長形成等差數列

(3) $T_n$的面積隨$n$增大而增大　　(4) $T_5$的三高依序形成等差數列

(5) $T_3$的最大角大於$T_2$的最大角

答案：(2)(3)

詳解：可圍成三角形：$n+(n+1)>n+2 \Rightarrow n>1$

①銳角三角形：$n^2+(n+1)^2>(n+2)^2 \Rightarrow 2n^2+2n+1>n^2+4n+4$

$\Rightarrow n^2-2n-3>0 \Rightarrow (n-3)(n+1)>0 \Rightarrow n>3\ or\ n<-1$(不合)

②鈍角三角形：$1<n<3 \Rightarrow n=2$

③直角三角形：$n=3$

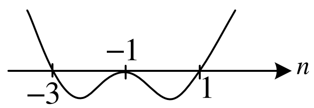
(1) 銳角、鈍角、直角三角形均有可能

(2) 周長為$3n+3 \Rightarrow 9, 12, 15, \cdots\cdots, 33$(為公差為 3 的等差數列)

(3) $s=\dfrac{3n+3}{2}$

$T_n$面積為$\sqrt{\dfrac{3n+3}{2}\times\dfrac{n+3}{2}\times\dfrac{n+1}{2}\times\dfrac{n-1}{2}}$

$y=3(n+1)^2(n+3)(n-1)$




由圖可知，$n \geq 2$時，其值為遞增

(4) $T_5$的邊長為 5,6,7；面積為$\sqrt{\dfrac{18\times8\times6\times4}{16}}=6\sqrt{6}$

$\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot h_1=6\sqrt{6}$、$\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot h_2=6\sqrt{6}$、$\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot h_3=6\sqrt{6}$

$\Rightarrow h_1=\dfrac{12\sqrt{6}}{5}, h_2=\dfrac{12\sqrt{6}}{6}, h_3=\dfrac{12\sqrt{6}}{7}$(非等差)

【另解】高的比為邊長的倒數比

$\dfrac{1}{5}:\dfrac{1}{6}:\dfrac{1}{7}=42:35:30 \Rightarrow$ 高分別為$42k, 35k, 30k$(非等差)

(5) $T_3$為直角三角形；$T_2$為鈍角三角形

$T_3$的最大角小於$T_2$的最大角

9. 某實驗室蒐集了大量的 $A$、$B$ 兩相似物種，記錄其身長為 $x$（單位：公分）與體重 $y$（單位：公克），得 $A$、$B$ 兩物種的平均身長分別為 $\overline{x_A}=5.2$ 、 $\overline{x_B}=6$，標準差分別為 0.3、0.1。令 $A$、$B$ 兩物種的平均體重分別為 $\overline{y_A}$ 、 $\overline{y_B}$ 。若 $A$、$B$ 兩物種其體重 $y$ 對身長 $x$ 的迴歸直線分別為 $L_A: y=2x-0.6$ 、 $L_B: y=1.5x+0.4$ ，相關係數分別為 0.6、0.3。今發現一隻身長 5.6 公分、體重 8.6 公克的個體 $P$，試選出正確的選項。

(1) $\overline{y_A}<\overline{y_B}$

(2) $A$ 物種的體重標準差小於 $B$ 物種的體重標準差

(3) 就 $A$ 物種而言，個體 $P$ 的體重與平均體重 $\overline{y_A}$ 之差的絕對值大於一個標準差

(4) 點(5.6, 8.6)到直線 $L_A$ 的距離小於其到直線 $L_B$ 的距離

(5) 點(5.6, 8.6)與點 $(\overline{x_A}, \overline{y_A})$ 的距離小於其與點 $(\overline{x_B}, \overline{y_B})$ 的距離

答案：(3)

詳解：(1) $(\overline{x_A}, \overline{y_A})$ ，$(\overline{x_B}, \overline{y_B})$ 必在彼此的迴歸直線上

得 $\overline{y_A}=2\times5.2-0.6=9.8$ ； $\overline{y_B}=1.5\times6+0.4=9.4$

(2)從迴歸直線的斜率可知 $m=r\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$2=0.6\times\dfrac{\sigma_{y_A}}{0.3}\Rightarrow\sigma_{y_A}=1$ ；$1.5=0.3\times\dfrac{\sigma_{y_B}}{0.1}\Rightarrow\sigma_{y_B}=0.5$

(3) $\left|8.6-\overline{y_A}\right|=\left|8.6-9.8\right|=1.2>1=\sigma_{y_A}$

(4) $L_A: 2x-y-0.6=0$ ； $L_B: 3x-2y+0.8=0$ ； $P(5.6, 8.6)$

$d(P, L_A)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{20}}$ (大)；$d(P, L_B)=\dfrac{0.4}{\sqrt{13}}=\dfrac{4}{\sqrt{1300}}$ (小)

(5) $Q(\overline{x_A}, \overline{y_A})=Q(5.2, 9.8)\Rightarrow\overline{PQ}=\sqrt{0.4^2+1.2^2}$ (大)

$R(\overline{x_B}, \overline{y_B})=R(6, 9.4)\Rightarrow\overline{PR}=\sqrt{0.4^2+0.8^2}$ (小)

| | 身高 $\mu_x$ | 體重 $\mu_y$ | 身高 $\sigma_x$ | 體重 $\sigma_y$ | $r$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$物種 | $\overline{x_A}=5.2$ | $\overline{y_A}=9.8$ | 0.3 | 1 | 0.6 | 2 |
| $B$物種 | $\overline{x_B}=6$ | $\overline{y_B}=9.4$ | 0.1 | 0.5 | 0.3 | 1.5 |

10. 坐標平面上有一正方形與一正六邊形，正方形在正六邊形的右邊。已知兩正多邊形都有一邊在 $x$ 軸上，且正方形中心 $A$ 與正六邊形中心 $B$ 都在 $x$ 軸的上方，且兩多邊形恰有一個交點 $P$，又知正方形的邊長為 6，而點 $P$ 到 $x$ 軸的距離為 $2\sqrt{3}$。試選出正確的選項。

(1) 點 $A$ 到 $x$ 軸的距離大於點 $B$ 到 $x$ 軸的距離　　(2) 正六邊形的邊長為 6

(3) $\overrightarrow{BA}=(7,3-2\sqrt{3})$　　(4) $\overline{AP}>\sqrt{10}$

(5) 直線 $AP$ 斜率大於 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

答案：(3)(5)

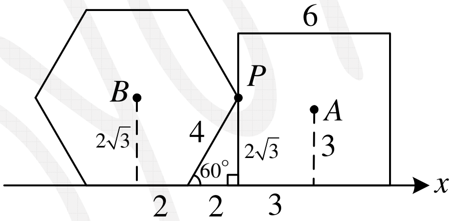
詳解：(1)如圖，點 $A$ 到 $x$ 軸的距離為 3(小)；點 $B$ 到 $x$ 軸的距離為 $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ (大)

(2)如圖，正六邊形的邊長為 4

(3)如圖，$\overrightarrow{BA}=(7,3-2\sqrt{3})$

(4) $\overline{AP}=\sqrt{3^2+(2\sqrt{3}-3)^2}<\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1^2}$　$(2\sqrt{3}-3\approx 2\times 1.732-3=0.464<1)$

(5) $AP$ 的斜率為 $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}\approx\dfrac{1.732-2}{\sqrt{3}}=\dfrac{-0.268}{\sqrt{3}}>\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$



11. 考慮二元一次方程組$\begin{cases} ax+6y=6 \\ x+by=1 \end{cases}$，其係數$a\,,b$之值分別由投擲一顆公正骰子與一枚均勻硬幣來決定。令$a$值為骰子出現之點數；若硬幣出現正面時$b$值為 1，若硬幣出現反面時$b$值為 2。試選出正確的選項。

(1) 擲出$a=b$的機率為$\dfrac{1}{3}$

(2) 此方程組無解的機率為$\dfrac{1}{12}$

(3) 此方程組有唯一解的機率為$\dfrac{5}{6}$

(4) 硬幣出現反面且此方程組有解的機率為$\dfrac{1}{2}$

(5) 在硬幣出現反面且此方程組有解的條件下，$x$值為正的機率為$\dfrac{2}{5}$

答案：(2)(3)

詳解：(1) $P(a=b=1)+P(a=b=2)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

先求$\triangle=\begin{vmatrix} a & 6 \\ 1 & b \end{vmatrix}=ab-6$

若$\triangle=0 \Rightarrow ab=6 \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=1 \end{cases} or \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$

①若$a=6\,,b=1$，方程組$\begin{cases} 6x+6y=6 \\ x+y=1 \end{cases}$(無限多組解)

②若$a=3\,,b=2$，方程組$\begin{cases} 3x+6y=6 \\ x+2y=1 \end{cases}$(無解)

③其餘皆為(恰一組解)

(2) $P(a=6\,,b=1)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$

(3) $1-(\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2})\times 2$ (扣除$a=6\,,b=1$以及$a=3\,,b=2$)

(4) $a=1,2,4,5,6\,,b=2 \Rightarrow (\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2})\times 5=\dfrac{5}{12}$

(5) $x=\dfrac{\triangle_x}{\triangle}=\dfrac{6b-6}{ab-6}=\dfrac{6}{2a-6}=\dfrac{3}{a-3}$，所求$=\dfrac{(a=4,5,6),(b=2)}{(a=1,2,4,5,6),(b=2)}=\dfrac{3}{5}$

12. 在坐標平面上給定三點 $A(1,0), B(0,1), C(-1,0)$，令 $\Gamma$ 為 $\triangle ABC$ 經矩陣 $T=\begin{bmatrix}3 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}$ 變換後的圖形，其中 $a$ 為實數。試選出正確的選項。

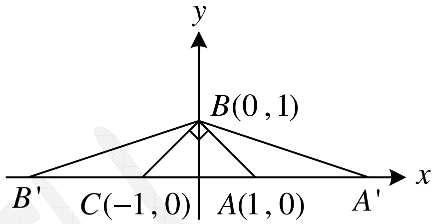
(1) 若 $a=0$，則 $\Gamma$ 為等腰直角三角形

(2) $\triangle ABC$ 的邊上至少有兩點經 $T$ 變換後坐標不變

(3) $\Gamma$ 必有部分落在第四象限

(4) 平面上找得到一個圖形 $\Omega$ 經 $T$ 變換後為 $\triangle ABC$

(5) $\Gamma$ 的面積為定值




答案：(2)(4)(5)

詳解：(1)若 $a=0\Rightarrow T=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 為伸縮矩陣(將 $x$ 座標伸縮 3 倍)

從圖可知，原圖形為等腰直角三角形

經由伸縮之後，點 $B$ 不變，點 $A, C$ 往左右伸縮 3 倍

所以角 $B$ 變為鈍角，$\Gamma$ 為鈍角等腰三角形

(2) $(0,0), (0,1)$ 皆經由 $T$ 變換後坐標不變

(3)如(1)，圖形沒有落在第四象限上

(4)因為 $\det(T)=3\neq 0\Rightarrow$ 反矩陣 $T^{-1}$ 存在

$\Rightarrow$ 將 $A, B, C$ 經由 $T^{-1}$ 變換後可得圖形 $\Omega$

(5) 圖形 $\Gamma$ 的面積 $=\triangle ABC$ 面積 $\times\left|\begin{vmatrix}3 & 0\\ a & 1\end{vmatrix}\right|=(\frac{1}{2}\times 2\times 1)\times 3=3$(定值)

13. 某銷售站銷售甲、乙、丙三型手機，甲手機每支利潤 100 元，乙手機每支利潤 400 元，丙手機每支利潤 240 元。上年度甲、乙、丙手機各賣出 $A, B, C$ 支，平均每支利潤為 260 元；且知銷售甲、乙兩型手機共 $A+B$ 支的平均每支利潤為 280 元。則該站上年度售出的三型手機數量比為 $A:B:C=$ ○:○:○ 。

（化為最簡整數比）

答案：$A:B:C=2:3:5$

詳解：依題意可列式為 $\dfrac{100A+400B+240C}{A+B+C}=260$；$\dfrac{100A+400B}{A+B}=280$

$$\begin{cases}-160A+140B-20C=0\\ -180A+120B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8A-7B+C=0\\ 3A=2B\Rightarrow A:B=2:3\end{cases}$$

令 $A=2t, B=3t\Rightarrow C=-8A+7B=5t$

得 $A:B:C=2:3:5$

14. 已知 $f(x), g(x), h(x)$ 皆為實係數三次多項式，且除以 $x^2-2x+3$ 的餘式分別為 $x+1, x-3, -2$。若 $xf(x)+ag(x)+bh(x)$ 可以被 $x^2-2x+3$ 整除，其中 $a, b$ 為實數，則 $a=$ ○○ , $b=$ ○ 。

答案：$a=-3, b=3$

詳解：$\begin{cases} f(x)=(x^2-2x+3)Q_1(x)+x+1 \\ g(x)=(x^2-2x+3)Q_2(x)+x-3 \\ h(x)=(x^2-2x+3)Q_3(x)+(-2) \end{cases}$

$xf(x)+ag(x)+bh(x)=(x^2-2x+3)Q(x)+x(x+1)+a(x-3)+b(-2)$

(只需注意餘式的變化)

$x(x+1)+a(x-3)+b(-2)=x^2+(1+a)x+(-3a-2b)$ 需可以 $x^2-2x+3$ 整除

$\Rightarrow \begin{cases} 1+a=-2 \\ -3a-2b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=3 \end{cases}$

15. 某商場舉辦現場報名的摸彩箱抽獎活動，報名截止後，主持人依報名人數置入同數量的摸彩球，其中有 10 顆被標示為幸運獎，其獎項為 5000 元禮券及 8000 元禮券各 5 顆，每顆球被抽中的機率皆相同，抽後不放回。抽獎前，主辦單位依獎項個數與報名人數，主持人公告中獎機率為 0.4%。開始抽獎後，每人依序抽球，每個人只有一次抽獎機會。若前 100 位參加抽獎者，恰有 1 人抽中 5000 元禮券且沒有人抽中 8000 元禮券，則抽獎順序為第 101 號者可獲禮券金額的期望值為 ○○ 元。

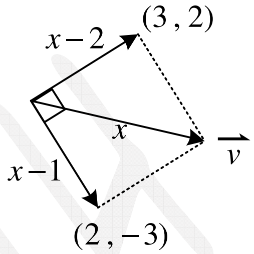
答案：25

詳解：先求出總顆數 $n$：中獎機率 $\frac{10}{n}=0.4\% \Rightarrow n=\frac{10}{0.004}=2500$

| $m$ | 5000 | 8000 | 0 |
|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{4}{2400}$ | $\frac{5}{2400}$ | $\frac{2391}{2400}$ |

期望值為 $5000\times\frac{4}{2400}+8000\times\frac{5}{2400}+0=25$

16. 坐標平面上，已知向量 $\overrightarrow{v}$ 在向量 $(2,-3)$ 方向的正射影長比原長少 1，而在向量 $(2,-3)$ 方向的正射影長比原長少 2。若 v 與兩向量 $(2,-3)$ , $(2,-3)$ 的夾角皆為銳角，則 $\overrightarrow{v}$ 在向量(4,7)方向的正射影長為 $\dfrac{○\sqrt{○}}{○}$ 。（化為最簡根式）




答案：$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

詳解：先發現 $(2,-3)\cdot(3,2)=0 \Rightarrow$ 兩向量垂直

設 $|\overrightarrow{v}|=x$，依題意，如圖

$(x-2)^2+(x-1)^2=x^2 \Rightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow (x-1)(x-5)=0 \Rightarrow x=5,1$（不合）

$\overrightarrow{v}=\dfrac{4}{\sqrt{13}}(2,-3)+\dfrac{3}{\sqrt{13}}(3,2)=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(17,-6)$

$\overrightarrow{v}$ 在向量(4,7)方向的正射影長為

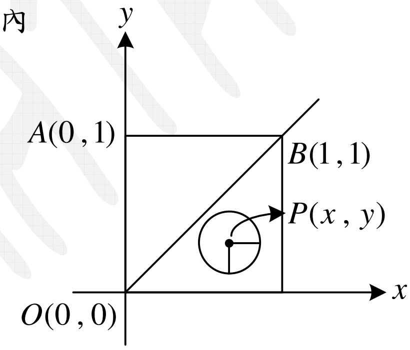
$$\frac{\overrightarrow{v}\cdot(4,7)}{|(4,7)|}=\frac{\frac{1}{\sqrt{13}}(17,-6)\cdot(4,7)}{\sqrt{4^2+7^2}}=\frac{26}{13\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

17. 坐標平面上，在以 $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$ 為頂點的正方形（含邊界）內，令 $R$ 為滿足下述條件的點 $P(x,y)$ 所成區域：與點 $P(x,y)$ 的距離為 $|x-y|$ 之所有點所成圖形完全落在正方形 $OABC$（含邊界）內。則區域 $R$ 的面積為 $\dfrac{\bigcirc}{\bigcirc}$。（化為最簡分數）

答案：$\dfrac{1}{3}$

詳解：題意為以 $P(x,y)$ 為圓心，半徑 $r=|x-y|$ 的圓

整個圓必須落在正方形 $OABC$（含邊界）內




①當 $x>y$

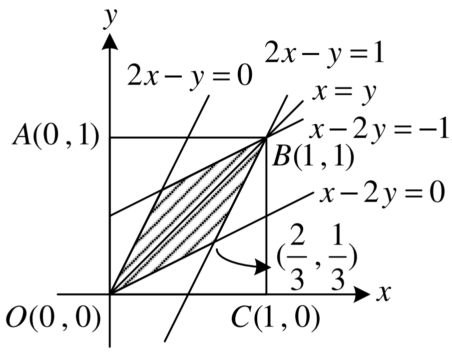
$$\begin{cases} r=(x-y)\le(1-x) \\ r=(x-y)\le y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y\le 1 \\ x-2y\le 0 \end{cases}$$

$$P(x,y)\text{ 須滿足}\begin{cases} x>y \\ 2x-y\le 1 \\ x-2y\le 0 \end{cases}$$

②當 $x<y$

$$\begin{cases} r=(y-x)\le x \\ r=(y-x)\le(1-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y\ge 0 \\ x-2y\ge -1 \end{cases}$$

$$P(x,y)\text{ 須滿足}\begin{cases} x<y \\ 2x-y\ge 0 \\ x-2y\ge -1 \end{cases}$$




所求面積為 $=\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC} \end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{3}$

18-20 題為題組

坐標空間中，設 $O$ 為原點，$E$ 為平面 $x-z=4$。試回答下列問題。

18. 若原點 $O$ 在平面 $E$ 上的投影點為 $Q$，且向量 $\overrightarrow{OQ}$ 與向量(1,0,0)的夾角為 $\alpha$，則 $\cos\alpha$ 之值為下列哪一選項？（單選題，3 分）

(1) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(2) $-\dfrac{1}{2}$　(3) $\dfrac{1}{2}$　(4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(5) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

答案：(4)

詳解：設 $Q=O+t(1,0,-1)=(t,0,-t)$

$Q(t,0,-t)$ 在平面 $x-z=4$ 上 $\Rightarrow t-(-t)=4\Rightarrow t=2$

得 $Q(2,0,-2)\Rightarrow\overrightarrow{OQ}=(2,0,-2)$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OQ}\cdot(1,0,0)}{|\overrightarrow{OQ}|\cdot 1}=\frac{(2,0,-2)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{2^2+0^2+(-2)^2}}=\frac{2+0+0}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

19. 已知空間中有一點 $P(a,b,c)$ 滿足向量 $\overrightarrow{OP}$ 與向量(1,0,0)的夾角 $\theta\le\dfrac{\pi}{6}$。試說明實數 $a,b,c$ 滿足不等式 $a^2\ge 3(b^2+c^2)$。（非選擇題，4 分）

答案：略

詳解：$\overrightarrow{OP}=(a,b,c)$

$$\cos\theta=\frac{(a,b,c)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot 1}=\frac{a+0+0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 4a^2\ge 3(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow a^2\ge 3(b^2+c^2)$$

20. 承 19 題，已知點 $P$ 在平面 $E$ 上且 $b=0$。試求 $c$ 的最大可能範圍，並求線段 $\overline{OP}$ 的最小可能長度。（非選擇題，8 分）

答案：$2-2\sqrt{3}\le c\le 2+2\sqrt{3}$；$4(\sqrt{3}-1)$

詳解：因為點 $P(a,b,c)$ 在平面 $E$ 上 $\Rightarrow a-c=4\Rightarrow a=4+c$

由 19 題的不等式 $a^2\ge 3(b^2+c^2)\Rightarrow a^2\ge 3c^2\Rightarrow (4+c)^2\ge 3c^2$

$\Rightarrow 2c^2-8c-16\le 0\Rightarrow c^2-4c-8\le 0\Rightarrow 2-2\sqrt{3}\le c\le 2+2\sqrt{3}$

$\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(4+c)^2+0^2+c^2}=\sqrt{2c^2+8c+16}=\sqrt{2(c+2)^2+8}$

因為 $-2<2-2\sqrt{3}$，最小值產生在 $c=2-2\sqrt{3}$ 時

$\overline{OP}$ 的最小值為

$\sqrt{2(2-2\sqrt{3})^2+8(2-2\sqrt{3})+16}=\sqrt{64-32\sqrt{3}}=4\sqrt{4-2\sqrt{3}}=4(\sqrt{3}-1)$