

臺北市立建國高級中學 112 學年度科學班甄選入學科學能力檢定

【數學能力檢定】試題本

請不要翻到次頁!!

讀完本頁說明，聽從監試委員的指示，才開始作答!

注意事項

1. 請檢查桌面上已放置「試題本」與「答案卷」各一份。
2. 請核對「答案卷」左上角的號碼與自己的甄選證號碼是否一致，若有錯誤請立即舉手請求查對更正。
3. 可利用「試題本」空白處計算。
4. 試題中參考的附圖，不一定代表實際大小。作答時，不可使用有量角功能之工具。
5. 交卷時，「試題本」務必連同「答案卷」一併送交監試人員，然後離場。
6. 故意損壞試題本(卷)，或於答案卡(卷)上挖補、汙損、折疊、作標記、顯示自己身分者，該節甄試科目不予計分。

測驗說明

1. 考試時間為 100 分鐘。
2. 「試題本」採單面印刷，共 4 頁(不含封面)。多重選擇題共 2 題，填充題共 6 題，計算證明題共 4 題。
3. 「答案卷」採單面印刷，共 5 頁(不含封面)。

作答方式

1. 答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分，更正時，可以使用修正液(帶)。
2. 未使用藍、黑色鋼筆或原子筆書寫於「答案卷」，或書寫不清，致評閱人員無法辨識答案，其責任自行負責，不得提出異議。

請聽到考試開始的信號聲後，於「試題本」右上角
方格內填入自己的甄選證號碼，再翻頁作答。

臺北市立建國高級中學 112 學年度科學班甄選入學科學能力檢定

【數學能力檢定】試題本

一、多重選擇題：每題 7 分，共 14 分。答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分。

說明

(1) 每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 7 分，只答錯一個選項者可得 4 分，答錯兩個或兩個以上選項者不給分；所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(2) 答錯選項的定義為「沒選正確的選項或選了不正確的選項」。

1. 如圖(僅供參考)， $\triangle ABC$ 的內切圓為圓 O ， $\triangle ABC$ 的三邊長 $\overline{AB}=5$ ， $\overline{AC}=7$ ， $\overline{BC}=8$ 。點 D 、

E 、 F 為切點。過圓心 O 作 \overline{BC} 的平行線，分別與 \overline{AB} 、 \overline{AC} 交於點 G 、 H 。請選出正確的選項。

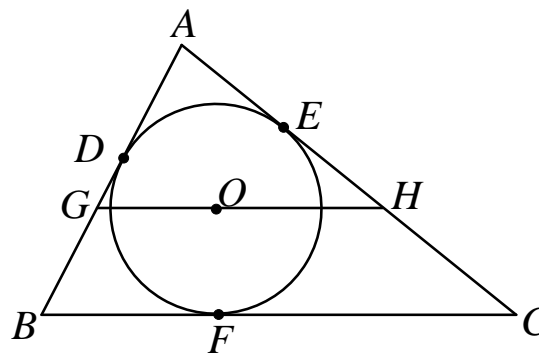
(1) \overline{BC} 上的高 $=\frac{5}{2}\sqrt{3}$

(2) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

(3) $\overline{AD}=3$

(4) $\overline{BG}=\overline{GO}$

(5) $\overline{GH}=\frac{24}{5}$



2. 現有 1~112 共 112 個數字，現在將 2 的倍數乘上 (-1)，再將 3 的倍數乘上 (-1)，最後再將 5

的倍數乘上 (-1)。請選出正確的選項。

(1) 最後的 112 個數字，相乘的值為 112!

(2) 共有 26 個數字，在過程中恰被乘上 2 次 (-1)

(3) 最後的 112 個數字中，有 57 個為正數

(4) 最後的 112 個數字中，6 的倍數的總和為 846

(5) 最後的 112 個數字，總和為 180

說明： $n!=n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ 。例如： $3!=3 \cdot 2 \cdot 1=6$ 。

二、填充題：每題 7 分，共 42 分。答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分。

1. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，點 D 在 \overline{AC} 上且 $\overline{AD} : \overline{DC} = 1 : 2$ ， $\overline{BD} = 2$ ，求 $\triangle BCD$ 面積的最大值
= _____。

2. 有一機器人在數線上左右移動，已知機器人一開始的位置在原點，經過三次位移後停留在 1，且三次位移的乘積為 9，則此機器人三次位移的距離總和最小值=_____。
例如：若機器人先向右移動 2 單位，位移記為「+2」，再向左移動 3 單位，位移記為「-3」。則兩次位移後，機器人停留在 $2 - 3 = -1$ ，且兩次位移乘積為 $2 \cdot (-3) = -6$ ；兩次位移的距離總和為 $|2| + |-3| = 5$ 。

3. 令 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 為領導係數是正數的實係數二次函數。已知在 $2 \leq x \leq 4$ 時，滿足 $|f(x) - 6| \leq 4$ 且
 $5a + 2b + 20 = 0$ ， $|c - 15| \leq 12$ ，求 $f(x) =$ _____。

4. 設 n 是小於 2023 的正整數，則滿足 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = \frac{3n}{4}$ 的 n 有_____個。

高斯符號 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，例如： $\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor = 2$ 。

5. 已知實數 x, y 滿足 $x^2 + y^2 = 2$ 。令 $x^4 + xy + y^4$ 的最大值、最小值分別為 M 、 m 。則 $M + m$
= _____。

6. 已知 m, n 為正整數且 $(m^2 + 1)(n^2 + 1) = 2(mn - 2)(m + n + 1) + 2$ ，試求數對 $(m, n) =$ _____。(答案不
只 1 組)

三、計算證明題：本大題共有四題計算證明題，必須寫出演算過程或理由，否則將予

扣分。每題配分標於題末，共 44 分。

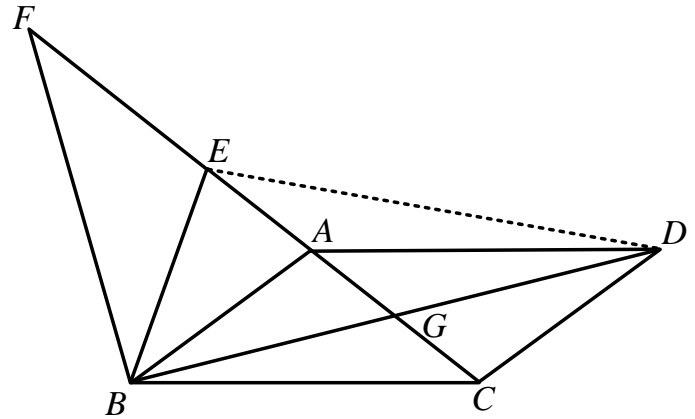
1. 證明： $7^{1013} + 8^{2023}$ 可被 57 整除。(8 分)

2. 如圖(僅供參考), $ABCD$ 為平行四邊形, 點 E 、 F 在直線 AC 上且 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BE} = \overline{EF} = 2\overline{AE}$, \overline{BD} 交 \overline{AC} 於點 G 。

(1) 證明: $\triangle ABC \cong \triangle BEF$ 。(3 分)

(2) 證明: $\overline{BC}^2 = \frac{5}{2}\overline{AB}^2$ 。(4 分)

(3) 證明: $\overline{DE} = 2\overline{AB}$ 。(5 分)

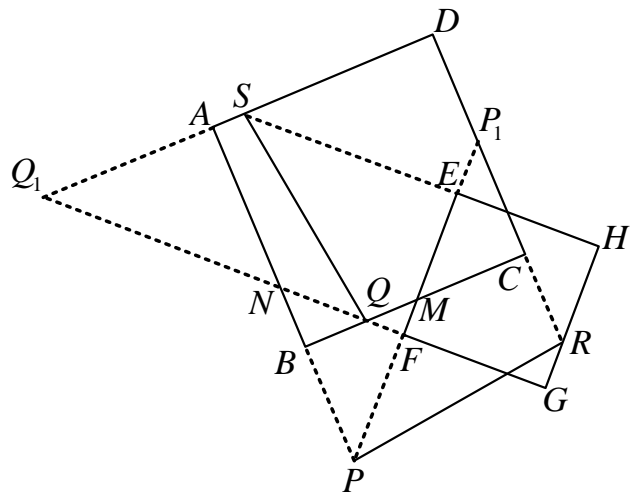


3. 如圖(僅供參考), 平面上兩個正方形 $ABCD$ 及 $EFGH$, 直線 EF 與直線 AB 、直線 BC 、直線 CD 分別相交於 P 、 M 、 P_1 , 直線 FG 與直線 BC 、直線 AB 、直線 AD 分別相交於 Q 、 N 、 Q_1 , 直線 AD 與直線 EH 相交於 S , 直線 CD 與直線 GH 相交於 R 。

(1) 證明: $\angle PP_1R = \angle QQ_1S$ 。(3 分)

(2) 證明: $\overline{QQ_1} = \overline{PP_1}$ 。(5 分)

(3) 證明: $\overline{PR} = \overline{QS}$ 。(5 分)



4. 有一個無窮數列如下: $1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, \dots$, 即在第 k 個 1 和第 $k+1$ 個 1 之間插入 k 個 -1 。考慮此數列前 2026 項的數值。

(1) 試問此數列前 2026 項中, 出現幾個 1。(4 分)

(2) 把此數列前 2026 項的數值兩兩相乘後再加總, 求其總和。(7 分)

說明: a, b, c 此三個數的兩兩相乘後再加總的總和為 $ab + ac + bc$ 。