國立基隆女中 112 學年第 2 次教師甄試 筆試試題 數學科

一、填充題：60 分(每題 5 分)

1. 滿足聯立不等式$\begin{cases} |x|+|y|+|x+y|\le 100 \\ x^2+y^2\le 2500 \end{cases}$的點所形成的區域面積為______。

[答案： $2500+1250\pi$ **]**

2. 設 a 為整數，方程式 $x^2+(a-53)x+(2a+22)=0$ 的解為兩相異質數 p, q，其中 $p>q$，則 $p=$______。

[答案： 31 **]**

3. 設 $y=|\sqrt{3}\sin x-\cos x|$ 的圖形與 x 軸、y 軸、直線 $x=2\pi$ 所圍成的區域繞 x 軸旋轉所得的旋轉體為 S，旋轉體 S 的體積為______。

[答案： $4\pi^2$ **]**

4. 平面上，設△ABC 為等腰直角三角形，其中∠C 為直角且 $\overline{AC}=1$，在 $\overline{AB}$ 上取 n 等分點 $P_0=A, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n=B$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\overrightarrow{CP_{k-1}}\cdot\overrightarrow{CP_k}=$______。

[答案： $\frac{2}{3}$ **]**

5.設 $x_n = p^n + q^n$，其中 n 為正整數且 p,q 為方程式 $x^2 - 5x - 4 = 0$ 的兩實根，若 x_{n+2} 可表成 $ux_{n+1} + vx_n$ ，則實數對 $(u,v) =$______。

[答案： $(5,4)$ **]**

6.若複數 z 滿足 $z \times \bar{z} - 2z - 2\bar{z} = 8$ 且 $\arg(z-2) = \dfrac{\pi}{6}$ ，則 $z =$______。

[答案： $5+\sqrt{3}i$ **]**

7.已知空間中三個非零向量 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{c}$ 兩兩的夾角是 $60°$，且

$|\overrightarrow{a}| = 2, |\overrightarrow{b}| = 3, |\overrightarrow{c}| = 4$，若兩向量 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 滿足

$\overrightarrow{u} \bullet \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{a}\right) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v} \bullet \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{a}\right) = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{c}$,則 $|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|$ 的最大值為______。

[答案： $\dfrac{\sqrt{7}+2\sqrt{3}+\sqrt{13}}{2}$ **]**

8. 在單位正方體 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，若點 E 為 $\overline{A_1B_1}$ 的中點，則兩直線 $\overleftrightarrow{D_1E}$ 與 $\overleftrightarrow{BC_1}$ 的距離為______。

[答案： $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **]**

9.設 z 為複數，且 z 為方程式 $x^5 + x^4 + 1 = 0$ 的根，則滿足 $|z| = 1$ 的所有根之和為______。

[答案： -1 **]**

10.已知空間中三直線 $L_1: \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ ， $L_2: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z+1}{3}$ ，

$L_3: \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ ，若直線 L_1 與 L_2 、 L_3 均相交，則 $a:b:c =$______。

[答案： $4:5:4$ **]**

11.　10 名女學生排成一排而坐，然後每人隨機戴上一頂藍色、綠色或

是紅色的帽子，則每個人都找得到最少一名鄰座（坐在她左邊或是右邊）者戴上和自己相同顏色帽子的機率是＿＿＿＿＿。

[答案: $\frac{19}{2187}$]

12.設$[x]$表示不超過x的最大整數，則$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\left[\frac{2^3}{3}\right]+\dots+\left[\frac{2^{2024}}{3}\right]$的末兩位數為＿＿＿＿＿。

[答案：98]

二、計算題：30 分(每題 10 分)

1. 設 $f(x)=\begin{cases} x^3-2x, & x>1 \\ c & x=1 \\ ax^2-bx+1, & x<1 \end{cases}$ 為可微分函數，求實數 $a, b,$ 和 c。

[答案：a=3 b,=5 c= -1]

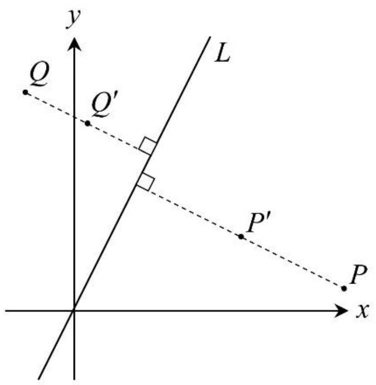
2.過直線$x-2y+13=0$上一動點A（A不在y軸上）作拋物線$y^2=8x$的兩條切線，M,N為切點，直線AM,AN分別與y軸交於點B,C。

(1)已知直線MN恆過一定點，試求此定點坐標；

(2)已知△ABC的外接圓恆過一定點，試求此定點坐標並求此圓半徑的最小值。

[答案： (1)$(13,8)$ ；(2)**(2,0)**； $\frac{3\sqrt{5}}{2}$]

3. $m\in\mathbb{R}$ R ，令直角坐標平面上直線L的方程式為$y=mx$。二階方陣T所對應的線性變換$P'=TP$，是將點P到L的垂直距離縮小一半得到P'點。$m=2$時的示意圖如下，P、Q兩點分別變換至P'、Q'。試求此二階方陣T。



[答案： $T=\begin{bmatrix}\dfrac{m^2+2}{2m^2+2} & \dfrac{m}{2m^2+2}\\ \dfrac{m}{2m^2+2} & \dfrac{2m^2+1}{2m^2+2}\end{bmatrix}$ **]**

三、證明題：10 分。

1.設平面四邊形 $ABCD$ 的四邊長 $a=AB,b=BC,c=CD,d=DA$，

(1)試求此四邊形面積的最大值；

(2)若 a,b,c,d 為四個連續的正整數。證明：四邊形 $ABCD$ 面積的最大值不為整數。

[解析]：

(1)不妨設四邊形 $ABCD$ **為凸四邊形，其面積為** S **。記。**

由 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin B+\dfrac{1}{2}cd\sin D$ ， $AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D$，

得 $2S=ab\sin B+cd\sin D$ ， $\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)=ab\cos B-cd\cos D$ ，

兩式平方後相加得 $4S^2+\dfrac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=(ab)^2+(cd)^2-2abcd\cos(B+D)$ ，

則

$$4S^2\le(ab+cd)^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$

$$=\frac{1}{4}(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)$$

即 $S\le\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ **，其中** $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

等號成立若且唯若 $B+D=\pi$ **，即** A,B,C,D **四點共圓。**

(2)設 $a=n$，故 S 的最大值為 $M=\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}$，

由 $n^2+3n<M<n^2+3n+1$，知 M 不為整數。