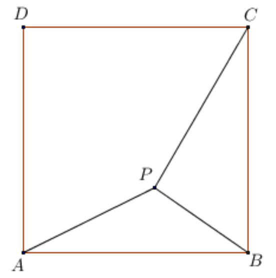
國立金門高中 112 學年度第一次教師甄選數學科試題卷 (共 3 頁)

一、填充題 (每題 6 分，共 60 分)

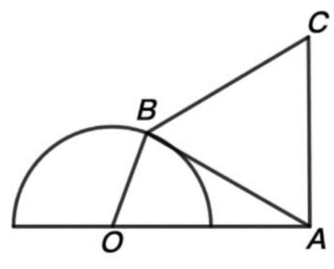
1. 設 P 為正方形 $ABCD$ 的內部一點，其中 $\overline{AP}=3\sqrt{2},\overline{BP}=3,\overline{CP}=6$，則正方形 $ABCD$ 的面積為 ＿＿＿＿＿＿。



2. A 箱中有 1 黑 1 白球，B 箱中有 1 白球；每次先由甲自 A 箱隨機取一球放入 B 箱中，再由乙自 B 箱隨機取一球放入 A 箱，這樣稱為一局，以 P_n 表示第 n 局結束時，A 箱中恰一黑一白球的機率， 求 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=$ ＿＿＿＿＿＿。

3. 空間中已知兩平行平面 $E_1: x-2y+4z=d_1$ 及 $E_2: x-2y+4z=d_2$ 的距離為 $\sqrt{6}$ ，平面 $E: x+y+z=0$ 分別與 E_1、E_2 交於直線 L_1、L_2，試求兩平行線 L_1、L_2 的距離為＿＿＿＿＿＿。

4. 如右圖(此為參考圖)，半圓 O 的半徑為 1，A 為直徑延長線上一點，$\overline{OA}=2$，B 為半圓上任一點，以 $\overline{AB}$ 為一邊做正三角形 ABC，求四邊形 $OACB$ 面積的最大值。



5. 假設某彗星在一拋物線形軌道運行。今以地球的地心為原點 O，地球半徑為 1 單位長，建立一空間坐標系。若彗星位在平面 $z=1$ 上，且投影到 xy 平面時的軌跡方程式為 $x=(y-2)^2-5$，試求彗星距離地球表面最近時的距離。

6. 對任意正數 x，定義函數$f(x)$為四數：$\log_{10} x$ 、 x^2-2x+1 、 $2x$ 、 $-x+1$中的最大值，則函數$f(x)$的最小值為________________ 。

7. 五人進行「剪刀、石頭、布」的猜拳，五人同時出拳，若能分出勝負(例如:三人出剪刀，二人出布時，算是分出勝負；但五人都出剪刀時，不算分出勝負)，則猜拳停止；若分不出勝負，則繼續猜拳，直到分出勝負為止。試求猜拳次數的期望值。

8. 若$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$，其中$n$為正整數，則$\dfrac{b_{20}}{b_{10}}$之值為________________ 。

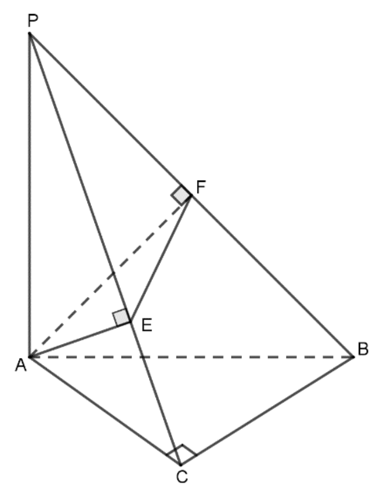
9. 求2022^{111}末兩位數是多少?

10. 已知a ,b為正整數，設函數$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{2n+1}+ax^2+bx-1}{2x^{2n}+3}$ ，若$\forall x\in R$ $f(x)$為連續函數，則序對$(a\ ,b)=$______ 。

二、計算與說明題 (每題 10 分，共 40 分)

1. 如右圖，在三角錐$P-ABC$中，$\overline{PA}$ 垂直底面ABC ，$\angle ACB=90°$，$\overline{AF}\perp\overline{PB}$、$\overline{AE}\perp\overline{PC}$ 。

   若$\overline{PA}=\overline{AB}=2$，求$\Delta AEF$的最大面積是多少?

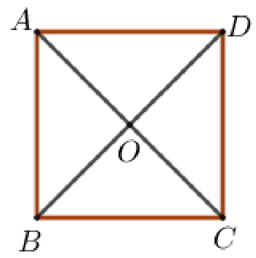


2. 設 x 為有理數，將 $(x+1)(x-2)$ 的小數第一位予以「四捨五入」後所得的整數為 $1+5x$，則 x 的值為多少？

3. 某老師任教高一甲、乙兩班，第一次月考高一甲班標準差為 8 分，高一乙班標準差為 12 分，請問將老師任教的高一學生(即將甲乙兩班合併)第一次月考的標準差有可能是下列情形嗎？試說明理由。

   (1) 標準差大於 12 分　　　　(2) 標準差小於 8 分

4. 如圖，O 為正方形 $ABCD$ 的中心。程式設定讓跳跳蛙在圖中諸點之間跳動，每次都可以跳到相鄰的任何一點，例如：由 A 點可跳到 O、B、D 中的任何一點，由 O 點可跳到 A、B、C、D 中的任何一點。設從 O 點開始，經 n 次跳動返回 O 點的路線有 a_n 種，而經 n 次跳動到達 A 點的路線有 b_n 種。



   (1) 試求數列〈 a_n 〉的遞迴關係式 (5 分)

   (2) 承(1)，試證：$a_n=2^nF_{n-1}(n\geq 2)$，其中〈 F_n 〉為費氏(Fibonacci)數列 (5 分)