

國立嘉義女子高級中學 112 學年度第 1 次教師甄選初試試題卷

科目：數學科

時間：112/6/20(二)19:00~20:30 計 90 分鐘。

說明：1.本試題卷共有 2 張 2 頁計有兩大題試題。答案請書寫於答案紙(2 張 2 面)。

2.請核對本試題卷右上角准考證號碼是否正確。

3.可利用試題卷空白處書寫或計算。

4.試題卷須連同答案卷一併繳回，請勿書寫姓名。

作答說明：所有的答案請依題號填寫於答案卷上，答案卷請用黑色或藍色原子筆作答，否則不予計分。禁用計算機。

試題卷與答案卷共 4 頁。

參考數值

● $\sqrt{2} \approx 1.414$; $\sqrt{3} \approx 1.732$; $\sqrt{5} \approx 2.236$; $\sqrt{7} \approx 2.646$; $\sqrt{11} \approx 3.317$; $\sqrt{13} \approx 3.606$

● $\log 2 \approx 0.3010$; $\log 3 \approx 0.4771$; $\log 7 \approx 0.8451$; $\log 11 \approx 1.0414$; $\log 13 \approx 1.1139$; $\log 17 \approx 1.2304$

一、填充題 (計 16 題，每題 5 分，共 80 分)：

1. 神童如風參加心算比賽的電視節目錄影，裁判亮出題目，觀眾只理解到題目是求

$$\sqrt[15]{15 \square \square \square \square, \square \square \square \square, \square \square \square \square, \square \square \square \square}$$

這個開根號的數時 (方框代表觀眾來不及記憶的數字)，說時遲，那時快，

如風只花了 15 秒就算出這個複雜的根式是一個正整數 k ，並經裁判確認正確。請問正整數 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 設 a 為正數，若方程式 $||2x+a|+x-a|=5$ 恰有三個解，則 a 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 設雙曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{240} = 1$ 的焦點為 $F、F'$ ，中心為 O ，若 P 為雙曲線 Γ 上的一動點，則滿足 $\angle FPF'$ 為鈍角且 \overline{OP} 長度為正整數的動點 P 共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種可能性。

4. 設 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，二階方陣 $X、Y$ 滿足 $X+Y=I$ 且 $XY=O$ ，其中 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。
若存在實數 $a > b$ 使得 $A = aX + bY$ ，則 a^b 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 小美每天早上起床後必先完成洗臉、刷牙、穿衣服、穿裙子、戴隱形眼鏡和吃早餐等六件事情，其中洗臉後才能戴隱形眼鏡，刷牙和洗臉後才會吃早餐，例如：洗臉→穿衣服→穿裙子→刷牙→戴隱形眼鏡→吃早餐。請問小美完成這六件事情，依前後順序的不同，共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種方法。

6. 由正整數 1 至 20 等 20 個數字中，甲任意取出兩個相異數 a 與 b 之後，再由乙任意取出另兩個相異數 c 與 d 。若每一個數字被取出的機會均等，則在已知 $a+b$ 為偶數的條件下， $c+d$ 為奇數的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 設 n 為正奇數，黑箱中有 n 枚硬幣，其中 1 枚兩面都是人頭 (Head)，1 枚兩面都是字 (Tail)，其餘的硬幣都是一面人頭和一面字。已知每個硬幣被取出的機會均等，每個硬幣兩面放在手心後朝上的機會也是均等的；將手伸入箱中握住三枚硬幣，取出後將手打開，在此三枚硬幣朝上的面是 2 個人頭和 1 個字的條件下，若此三硬幣的另一面是 1 個人頭和 2 個字的機率為 $\frac{4}{7}$ ，則正奇數 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 設 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ 、 $C(\gamma)$ 為複數平面上不共線的三點，都不在實軸上， $\alpha、\beta、\gamma$ 皆不為零，若 $\overline{AC} = 4$ 且 $\alpha^2 + 4\beta^2 + 5\gamma^2 = 2\gamma(\alpha + 4\beta)$ ，則 $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 設 $f(x)$ 為三次多項式函數，其圖形通過 $(1, 2)$ 、 $(5, 8)$ 、 $(9, 11)$ ，則 $\int_1^9 f(x)dx$ 之值為_____。
10. 設多項式函數 $y=f(x)$ 滿足 $f(x)=4x^3-12x^2+8x+20-\int_1^x f(t)dt$ ，則 $f(x)=$ _____。
11. 設 a, b 為非零實數，若實係數多項式 $y=f(x)$ 的圖形之反曲點為 $(b, 5)$ 且 $f'(x)=a(x-1)(x-3)$ ，則 $\int_0^4 f(x)dx$ 之值為_____。
12. 設 a 為實數，已知兩函數 $f(x)=4x^2-3ax+4\int_0^1 (t \cdot f(t))dt$ 與 $g(x)=x^2+4x+a-\int_0^x ((t+1) \cdot g'(t))dt$ 。若 $f(x)-x \cdot g(x)=0$ 有兩相異實根 α 與 β ，其中 $\alpha < \beta$ ，則 $\frac{1}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} (3x^2-2ax+a^2)dx$ 之最小值為_____。
13. 已知三角形 ABC 的重心為點 G ，且 $\overline{GB}=7$ ， $\overline{GC}=3$ ，若點 G 至直線 BC 的距離為 2，則 \overline{GA} 之長為_____。
14. 已知梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD}=5$ ， $\overline{BC}=10$ ，且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\angle ADC=120^\circ$ 。若梯形 $ABCD$ 有一個內切圓（與四個邊都相切的圓），則梯形 $ABCD$ 的面積為_____。
15. 在坐標平面上，設點 O 為原點，圓 $\Gamma: (x-4\sqrt{2})^2 + (y-4\sqrt{2})^2 = 16$ 之圓心為點 C 。若點 M 在圓 Γ 上且與平面上另兩點 P 與 Q 滿足以下向量的關係式：
 $\overline{OP} + \overline{OM} = \overline{MC} + 2\overline{MQ} = \overline{O}$ ，則 \overline{PQ} 之長度的最大值為_____。
16. 已知一四邊形的紙張 $ABCD$ ，其中 $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AD}=10$ ， $\overline{CD}=5$ 。沿著 \overline{BD} 摺起平面 ABD ，使得點 A 在平面 BCD 的投影點 P 落在 \overline{BC} 上，若摺起後四面體 $ABCD$ 的體積為 20，則摺起後點 B 到平面 ACD 的距離為_____。

二、計算證明題（計2題，每題10分，共20分）：

1. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1=1 \\ 3a_{n+1}=\pi \cdot \sin(a_n) \end{cases}$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，

(1)請說明 $\langle a_n \rangle$ 是否為有界數列？(3分)

(2)請判斷 $\langle a_n \rangle$ 是否為遞增數列或遞減數列？請證明之。(4分)

(3)求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$ (3分)

2. 在坐標平面上，設點 O 為原點，已知橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中 $a > b > 0$ 。若 P, Q 為橢圓 Γ 上任意兩點，試求 ΔOPQ 面積之最大值。(10分)