請考生依指示
填寫准考證後二碼 | | |

臺北市立大直高級中學

112 學年度第 1 次專任教師甄選

高中數學科 題本

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答

請閱讀以下測驗作答說明

◎ 測驗說明：

這是數學科題本，題本採雙面印刷。測驗時間 100 分鐘，

作答開始與結束請聽從監試委員的指示。

◎ 作答注意事項：

1. 本試題有兩大題：填充題 11 題、計算證明題 3 大題，共計 100 分。
2. 答案用紙請以黑色或藍色墨水的筆作答。
3. 請先將**每一張**答案用紙最上方的**准考證號碼**及**姓名**填寫完後再作答。
4. 劃記任何不相關記號及以其他顏色筆作答者不予計分。

   考試結束，試題本及答案用紙務必繳回，未繳回者以零分計算。

請聽到鈴（鐘）聲響後再翻頁作答

臺北市立大直高級中學 112 學年度第 1 次專任教師甄選　高中數學科試題卷

一、填充題：(每題 6 分，共 66 分)

1. 已知 a,b,c,d 為正數，且滿足 $a+3b=1$ 以及 $3c+d=1$，則 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{bcd}$ 的最小值為__________。

2. 已知兩數列 $\langle a_n\rangle_{n=1}^{\infty}$、$\langle b_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ 定義如下：$\begin{cases} a_1=20 \\ b_1=23 \end{cases}$ 且 $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \\ b_{n+1}=2a_n+3b_n \end{cases}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=$ _______ 。

3. 不等式 $|x|+|y|+|x-y|\le 10$ 的解集合，在坐標平面上對應的區域面積為____________。

4. 教室裡有左右兩塊黑板，在左邊黑板上寫下數字 100 並進行以下操作：

(1) 每次把左邊黑板上一個大於 1 的正整數 k 擦掉，並換成兩個較小的正整數 a 、b ，使得 $a+b=k$ 。

(2) 把乘積 $a\times b$ 寫在右邊黑板上。

重複這樣的操作，直到左邊黑板上的數字全都是 1 則停止操作。

此時，左邊黑板上共有 x 個數字 1，右邊黑板的數字總和最大值為 y ，則數對 (x,y) 為__________。

5. 甲乙兩人猜拳。假設每次甲猜贏的機率為 $\frac{1}{2}$ 、猜輸的機率為 $\frac{1}{3}$ 、平手的機率為 $\frac{1}{6}$ 。

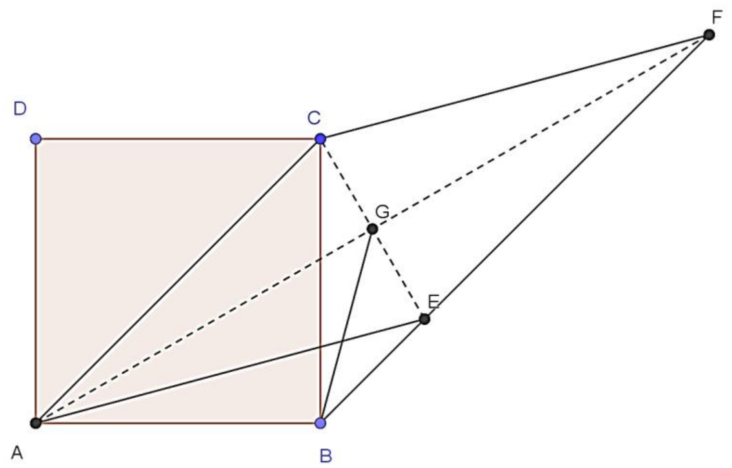
若規定每回合必須猜到有人猜贏為止，先連續贏兩回合者獲勝，則甲獲勝的機率為__________。

6. 若四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=8$ 、$\overline{BC}=15$ 、$\overline{CD}=17$ 、$\overline{DA}=10$ ，

則四邊形 $ABCD$ 的內切圓面積最大值為______________。

7. 空間中有兩條歪斜線 L 與 S，直線 L 上有三點 A、B、C，且 $\overline{AB}=\overline{BC}$。
直線 S 上有三點 D、E、F，其中 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 皆垂直 L。
已知 $\overline{AD}=10$、$\overline{BE}=13$、$\overline{CF}=24$，則歪斜線 L、S 的距離為_______________。

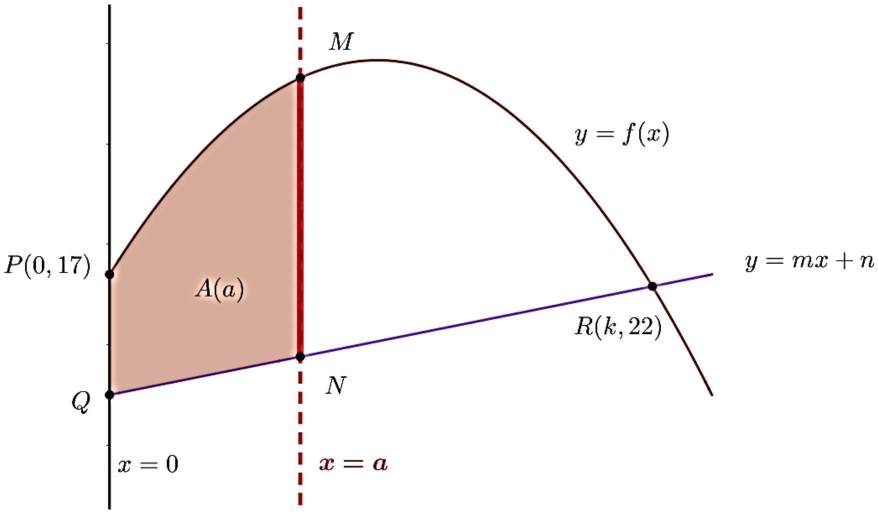
8. 如右圖，$ABCD$ 為正方形，
直線 BF 平行直線 AC，
E 在 BF 上使得 $AEFC$ 為菱形。
若 G 為菱形對角線交點，
則 $\tan\angle CBG=$________________。



9. 已知 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心。若 $\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+3\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{0}$，則 $\cos A=$______。

10. 已知 F 為橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{23}=1$ 在下半平面的焦點，C 為 Γ 的最大內切圓。在橢圓 Γ 上取一點 P，且 P 在上半平面，過 P 點對圓 C 作切線，令切點為 Q，則 $\overline{PF}-\overline{PQ}=$ ________ 。

11. 一個由多項式函數 $y=f(x)$ 與函數 $y=mx+n$ 、 $x=0$ 、 $x=a$ $(0\le a\le k)$ 所圍出的封閉區域，其面積函數為 $A(a)=-a^3+7a^2+5a$ ，如下圖。已知 $P(0,17)$, Q 分別為 $x=0$ 與 $y=f(x)$ 、 $y=mx+n$ 的交點；$R(k,22)$ 為 $y=f(x)$ 與 $y=mx+n$ 的交點，則多項式 $f(x)=$ ______________ 。



二、計算證明題：(共 34 分)

1. 如果 a 是一個實數，則 $[a]$ 定義為小於等於 a 的最大整數，例如：$[3.4]=3$ 、$[5]=5$ 、$[-2.6]=-3$ 。

   試求 $f(x)=2\left[\log\sqrt{x}\right]^2-\left[\log\dfrac{10}{x}\right]^2$ 的最大值，及發生最大值時 x 的範圍。 **(10 分)**

2. 已知集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2023\}$ 是前 2023 個正整數所構成的集合。

   <u>小直</u>從 A 的子集合中任意選取一個(每個 A 的子集合被<u>小直</u>選到的機會均等)，令此子集合為 B。

   定義隨機變數 X 如下：若 B 為非空集合，則 X 為 B 的最大元素；若 B 為空集合，則 $X=0$；

   試求 X 的期望值 $E(X)$ 。 **(10 分)**

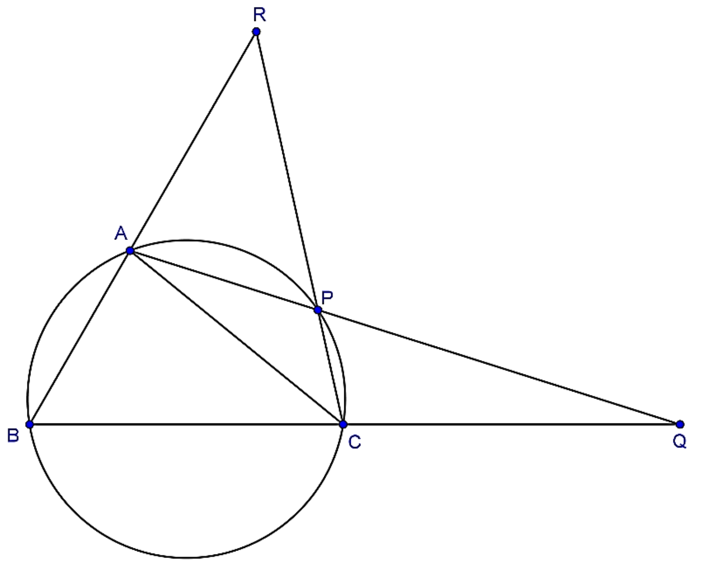
3. 如右圖，作△ABC 的外接圓，P 為 AC 上一點。

已知射線 AP 與射線 BC 交於一點 Q；

射線 CP 與射線 BA 交於一點 R。

(1) 若 $\angle B = 60°$，請證明：$\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BQ}}+\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BR}}=1$。**(7 分)**

(2) 若 $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BQ}}+\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BR}}=1$，請證明：$\angle B = 60°$。**(7 分)**



《試題結束》