

國立台灣師範大學數學系
九十五學年度推薦甄選入學指定項目甄試試題

筆試一 計算證明題

說明與注意事項：

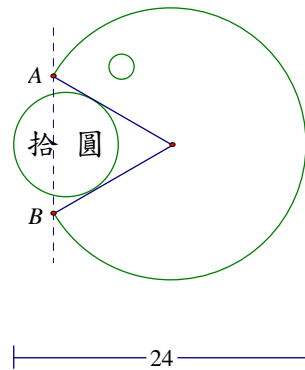
- (甲) 本試卷共五題（共兩頁），每題20分，合計100分。
(乙) 時間分配：120分鐘。（上午9：30～11：30）
(丙) 請將計算或證明過程寫在答案卷上，連同本試卷一併交回。

一、設 θ 是位於第三象限的一個角，且 $\sin \theta \cos \theta = \frac{2}{5}$ ，試求 $5 \cos \theta + 4 \sin \theta$ 的所有可能值。

二、設 x 與 y 都是實數，且 $x^2 - xy + 4y^2 = 1$ ，試求 $x^2 + 4y^2$ 的最大值與最小值。

三、設 a, b 與 c 是都不等於 1 的相異正數。若 a, b 與 c 三數成等比數列，而 $\log_a b$ ， $\log_b c$ 與 $\log_c a$ 三數成等差數列，試求此等差數列的公差。

四、爲了提醒同學某台自動販賣機會「吃錢」，班聯會想在機上漆一個小圓與一個缺六分之一圓的大圓相切的圖案，如下圖所示。基於空間考量，圖案的寬度要恰好 24 單位長，而且小圓必須與直線 AB 有兩相異交點。漆大圓的油漆，每平方單位需要 6 元；漆小圓的油漆，每平方單位需要 45 元。試問兩圓的半徑分別爲多少單位時油漆費用最少？



五、設一拋物線的頂點坐標爲 $(1, -3)$ ，且對稱軸的方程式爲 $2x + y + 1 = 0$ 。若此拋物線通過點 $(5, -3)$ ，試求此拋物線的方程式。