

112蘭陽女中（記憶版）

一、多重選擇題（共 2 題）

1. 請選出下列選項中，恰好有兩個實數解的方程式。
 - (A)
 - (B)
 - (C)
 - (D) $\log_{\sqrt{2}} x = \sqrt{2}^{|x|}$
 - (E)

2. 坐標平面上從 $A(-2, -3)$ 走捷徑到 $B(4, 3)$ ，即每一步向右走 1 或向上走 1，請選出正確的選項。
 - (A) 通過第四象限的走法。
 - (B) 通過第二象限的走法。
 - (C) 通過原點的方法數。
 - (D) 轉彎次數 = 3 的方法數。
 - (E) 轉彎次數 = 4 的方法數。

二、填充題（共 14 題）

※ 題目順序非原試卷之順序

1. 已知 $a + b + c = 0$ ，且 $\log A = a, \log B = b, \log C = c$ ，
求 $A^{\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \cdot B^{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)} \cdot C^{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = ?$
2. 已知 $x^3 + (a - 1)x^2 + (1 - 2a)x + (a - 1) = 0$ 有三整數解，
求 a 可能的值。
3. 已知 x 是銳角，求 $\sin x \cos^2 x$ 的最大值。
4. 今有八人： $A、B、C、D$ 、甲、乙、丙、丁排列，
已知 $A、B$ 皆排在 $C、D$ 右邊，且甲乙相鄰、甲丙不相鄰，求方法數。
5. $\triangle ABC$ 的三內角 α, β, γ
滿足 $\tan \gamma = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$ 、 $\sin(\beta - \alpha) = \cos \gamma$ ，求 $\alpha, \beta, \gamma = ?$

6. 已知空間中兩直線 $L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ 、 $L_2 : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{1}$ ， L_3 為 L_1, L_2 之公垂線。若 P 點在 L_1 上且與 L_3 距離為 2， Q 點在 L_2 上且與 L_3 距離為 2，求 \overline{PQ} 。

7. 已知 $x^2 + ax + 2 + i = 0$ 有實數解，求 $|a|$ 之最小值。

8. 平面上二點 $A(-3, -3), B(3, 5)$ ，已知 $\angle APB \geq 90^\circ$ ，求所有 P 圍成的圖形面積。

9. 已知 $2x^2 + 3y^2 = 6$ ，求 $x + 2y$ 的最小值。

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 - 1} = ?$

11. $f(x) = -x^2 + 2x$, $g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt$, 求 $g(x)$ 極值。

12. $f(x)$ 為一多項式函數, 且 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $3x+5$,
試求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(1) - f(x^2)}{x-1} = ?$

13. 已知 m 為自然數, 且對於任意正整數 n , $n^m - n$ 為 70 的倍數, 求 m 的可能最小值。

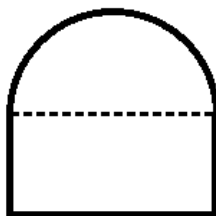
14. $\sqrt{2-2x}$

三、計算證明題 (共 3 題)

1. 試證明：

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

2. 平面上有一矩形，
以矩形的其中一邊為半徑向外作半圓，此圖形之周長為 L （見附圖），
試求此圖形面積之最大值，且此時的半圓之半徑為何？



3. 設 $f(n) = \left|1 - \frac{x}{3}\right|^n + \left|1 - \frac{y}{2}\right|^n$ ，且 $S = \{(x, y) \mid f(2) \leq 1 \leq f(1)\}$ ，
試求 S 之圖形面積為何？

參考解答

1	$\frac{1}{1000}$
2	1 或 -5
3	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$
4	1440
5	$\alpha = 45^\circ, \beta = 75^\circ, \gamma = 60^\circ$
6	$2\sqrt{10}$
7	$\sqrt{2\sqrt{5} + 4}$
8	25π
9	$-\sqrt{11}$
10	$\frac{1}{3}$
11	待補
12	18
13	13
14	待補
計算證明 1	法一： $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ 比較 x^n 係數；法二：考慮 $(0,0)$ 走捷徑到 (n,n) 的方法數
計算證明 2	半徑 = $\frac{L}{\pi + 4}$ ，面積 = $\frac{L^2}{2\pi + 8}$
計算證明 3	$6\pi - 12$