

高雄市 112 學年度市立高級中等學校教師甄選

數學科試題卷

【※答案一律寫在答案本上】

一、計算證明題 (1 至 12 題每題 6 分，13 至 16 題每題 7 分，共 100 分)

請寫下完整計算過程，否則不予計分

1. 設  $A(5, -1, 2), B(-5, -1, -6)$ ，點  $P$  在平面  $E: x + 2y + 3z - 6 = 0$  上

使  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$  有最小值，則點  $P$  的坐標為何？

2. 已知  $\alpha, \beta, \gamma$  為方程式  $x^3 - x - 3 = 0$  的三個根，試求  $\frac{\alpha-1}{\alpha+1} + \frac{\beta-1}{\beta+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} =$

3. 已知  $|x-1| \leq 2$ ， $|x+y| \leq 1$ ， $x, y \in \mathbb{R}$ ，則  $x-2y$  之最大值為？

4. 求  $\frac{(\sqrt{10+\sqrt{1}}) + (\sqrt{10+\sqrt{2}}) + \dots + (\sqrt{10+\sqrt{99}})}{(\sqrt{10-\sqrt{1}}) + (\sqrt{10-\sqrt{2}}) + \dots + (\sqrt{10-\sqrt{99}})}$  之值。

5. 設  $a$  為實數，且以下三數：

$$-a + \sqrt{2} + \log_2 2023, \quad 2a - 2\sqrt{2} + \log_4 2023, \quad -4a + 4\sqrt{2} + \log_8 2023$$

成等比數列，求此數列的公比。

6. 試求  $\sin^2 37^\circ + \cos^2 7^\circ - \sin 37^\circ \times \cos 7^\circ =$

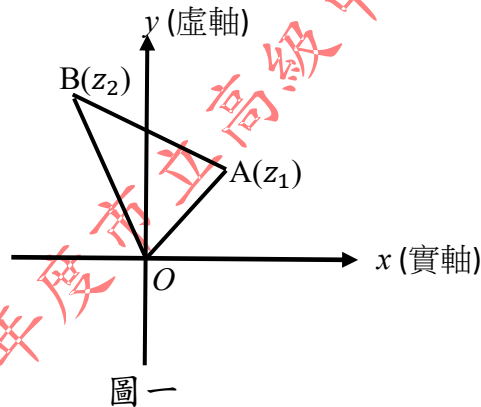
7. 設  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，其中  $a, b, c, d$  為常數，如果

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ ，試求  $\frac{1}{4}[f(0) + f(4)] =$

8. 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n^2} (\sqrt{4n^2 - 1} + \sqrt{4n^2 - 4} + \sqrt{4n^2 - 9} + \dots + \sqrt{4n^2 - n^2}) =$

9. 如圖一，設  $O$  為複數平面上的原點，並令點  $A, B$  分別代表複數  $z_1, z_2$ ，

已知  $|z_1| = 2, |z_2| = 3, |z_2 - z_1| = \sqrt{5}$ ，試求  $|z_1^2 + z_2^2|$ 。



10. 設  $\triangle ABC$  中，已知  $\overline{BC}$  與  $x$  軸平行，若  $A(1,8)$ ，內切圓圓心為  $(0,0)$ ，半徑 4。

試問  $\triangle ABC$  的垂心  $H$  坐標為？

11. 已知  $A, B$  為二階可逆方陣滿足  $A^2 + 4AB = O$ ，若  $A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$ ，

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}，求 a。$$

12. 給定平面上一個  $\triangle ABC$ ， $P$  為平面上的動點，

$$\text{令集合 } S = \left\{ P \mid x\vec{PA} + y\vec{PB} + z\vec{PC} = \vec{0}, x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1, 0 \leq z \leq 3 \right\}，$$

則集合  $S$  的區域面積為  $\triangle ABC$  的 \_\_\_\_\_ 倍。

13. 將 5 個 A 與 3 個 B 任意排列，把連續相同字母劃一底線定義為一個

\*連串\*，例如 A BBB AAAA 其連串數是 3，又如 B AA B AAA B 的連串數是 5，則將 5 個 A、4 個 B、3 個 C 任意排列後，連串數為 4 的排法有幾種？

14. 試證明：2023 可以整除  $1^{527} + 2^{527} + 3^{527} + \dots + 2022^{527}$ 。

15. 設  $a, b, c$  為  $\triangle ABC$  的三邊長，且  $x, y, z \in R$ ，若 
$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ bx + cy + az = 0 \\ cx + ay + bz = 0 \end{cases}$$
 有無限多組解，試證明  $\triangle ABC$  為正三角形。

16. 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4^n + 3^n}{8^n + 3^n} \right)^{\frac{1}{n}} =$