國立基隆女中 112 學年第 1 次教師甄試 筆試試題 數學科

一、填充題：每題5分，小計60分。

1. 滿足$\left[\log\sqrt{n}\right]=\left[\sqrt{\log n}\right]$的最大正整數$n$為________

2. $\left[\varphi^{2023}\right]$的個位數為________。($\varphi\cong1.618$為黃金比例)

3. 將十個半徑為 1 的球堆成一個三角垛，則最上面那顆球的最高點離地面的高度為________

4. 若實數$x>1$滿足$\log_2(\log_8 x)+\log_8(\log_4 x)+\log_4(\log_2 x)=\dfrac{2}{3}$，則$\log_2(\log_4 x)+\log_4(\log_8 x)+\log_8(\log_2 x)=$________。

5. 從集合$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$中隨機選取 4 個互不相同的數，則其中任意兩個數的和均不等於 10 的機率為________。

6. 設坐標平面上三點$A(1,0)$、$B(0,1)$、$P(x,y)$，已知經平面線性變換T作用後，A點被映射至點$A'(1,\sqrt{3})$、B點被映射至點$B'(-\sqrt{3},1)$，而P點被映射至點P'。若點P先對直線L：$y=2x$鏡射，再經過T作用後，其結果相當於點P先經過T作用，再對直線L'：$y=mx$鏡射，則m之值為________。

7. 已知有甲、乙、丙、丁四座城市，某商人最初待在甲城市，為了販售商品，每日會從所在城市移動到其他三座城市的其中一座，移動到任一座的機會皆相同，則三日後他在乙城市的機率為何？

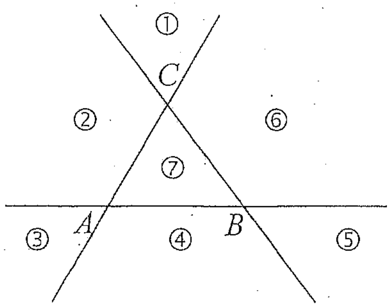
8. 平面上，P為$\overline{AB}$上一點滿足$\overline{AP}=5$且$\overline{BP}=3$，Q為平面上一點滿足$\overline{AQ}=7$且$\overline{BQ}=3$，若以$\overline{AB}$為直徑作一圓C，自P向Q作射線PQ交圓C於點R，試求$\overline{PR}$的長度。

國立基隆女中 112 學年第 1 次教師甄試 筆試試題 數學科

9.
設 f 為實數系上的連續函數，已知 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt = x^3 + x$，試求 $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx =$?

10.
如下圖，ΔABC 之三邊的延長線將平面分成七個區域，若

$2\overline{PA}+3\overline{PB}=\overline{PC}$，求 P 是在哪一區域？答：________。(請填選項①至⑦)



11.
已知三直線 $L_1:\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$，$L_2:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z+1}{3}$，

$L_3:\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$，若直線 L_1 與 L_2、L_3 均相交，求 $a:b:c$

=______________。(以最簡整數比表之)

12.
求 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}\sqrt{5+\sqrt{3+t}}\,dt$ 的值____________。

二、計算題：每題10分，計20分。

1. 比較 e^{π} 與 π^{e} 的大小。

國立基隆女中 112 學年第 1 次教師甄試 筆試試題 數學科

2. 某公司宣稱其公司的藥劑檢驗出癌症的機率 p 在 0.9 以上（含 0.9）。今檢定該藥劑檢驗出癌症的機率，並列出前三個步驟如下：

①假設「藥劑檢驗出癌症的機率$p \geq 0.9$」；

②確立檢定統計量為「隨機觀察 4 次藥劑檢驗出癌症的次數」；

③設定顯著水準為 0.05。

回答下列問題。

(1)設隨機變數 X 表示藥劑檢驗出癌症的次數，求拒絕域 X=________________。

(2)若試驗的結果為有 2 次藥劑檢驗出癌症，則是否拒絕「藥劑檢驗出癌症的機率 $p \geq 0.9$」的假設？________(填 是或否)，原因為何？

三、證明題：每題10分計20分。

1. 設函數 f 在一包含 a 的開區間中有定義：

(1) 請證明 f 在 $x=a$ 處可微分則 f 在 $x=a$ 處連續

(2) 試給出一函數 g，在 $x=1$ 處連續，但在 $x=1$ 處不可微分，並驗證之。

2.已知等軸雙曲線 Γ ： $x^2-y^2=a^2$ （ $a>0$ ）上一定點 $P(x_0,y_0)$ 及雙曲線 Γ 上兩動點 A,B 滿足 $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP})=0$（其中 O 為坐標原點）。

(1)證明： $\overline{PA}\perp\overline{PB}$ ；

(2)求 $\overline{AB}$ 的最小值。