教育部受託辦理112學年度
公立高級中等學校教師甄選

數學科　試題

作答注意事項

1. 本試題共兩部分：選擇題 12 題，及綜合題 2 大題，共計100分。
2. **選擇題請用2B軟心鉛筆在答案卡劃記，綜合題限用藍色、黑色原子筆或鋼筆在答案本上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆。**
3. 本科不可以使用電子計算器。

第一部分：選擇題（共40分）

一、單選題（每題3分，共24分）

(A) 1. 試求行列式 $\begin{vmatrix} 2020 & 2021 & 2022 \\ 2021 & 2022 & 2023 \\ 2022 & 2023 & 2025 \end{vmatrix}=$？

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 4095。

(A) 2. 求最大的整數 n 使得 $\dfrac{n^3+103}{n+11}$ 也是整數？

(A)1217 (B)4501 (C)603 (D)425。

(B) 3. 求曲線 $x^2+xy+y^2=3$ 在點 $(1,1)$ 上的切線方程式？

(A) $-2x+y=-1$ (B) $x+y=2$ (C) $x+3y=4$ (D) $2x+y=3$。

(B) 4. 試求 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cos(120^0 k)=$？

(A) $\dfrac{5}{8}$ (B) $\dfrac{5}{7}$ (C) $\dfrac{4}{7}$ (D) $\dfrac{4}{5}$。

(A) 5. 求 $\dfrac{10\times 9C^{10}_{10}\times 2^8+9\times 8C^{10}_{9}\times 2^7+8\times 7C^{10}_{8}\times 2^6+\cdots+2\times 1C^{10}_{2}}{3^9}=?$

(A)30 (B)90 (C)10 (D)110。

(B) 6. 如果複數 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則 $(\omega^5+\omega^4+5)(-3\omega^2+2\omega+2)(3\omega^2-\omega+3)=?$

(A) $80\omega+1$ (B)80 (C) $75\omega^2$ (D)75。

(B) 7. 甲、乙、丙三人到迴轉壽司餐廳用餐。餐廳現有 10 種壽司，每種壽司僅剩 2 盤。假設每種壽司每個人至多只能拿 1 盤，用餐完後發現每種壽司都至少有人拿了 1 盤。試問三人拿取壽司的組合共有多少種？

(A) 2^{10} (B) 6^{10} (C) 7^{10} (D) 8^{10}。

(A) 8. 觀察 2 的次方所形成的等比數列：$2,2^2,2^3,2^4,\cdots$，設其中出現的第一個 13 位數為 2^n，則 $n=$？

(A)40 (B)41 (C)42 (D)43。

二、複選題（每題 4 分，共 16 分，全對才給分）

(BD) 9. 現有 A、B 兩箱，其中 A 箱中有一紅球二白球，B 箱中有一白球，每球被取到的機率相同。每一回合做如下的操作：自 A 箱中隨機取兩球放入 B 箱中，再從 B 箱中隨機取兩球放入 A 箱。以「紅球在 A 箱」為狀態一、「紅球在 B 箱」為狀態二。試選出正確的選項。

(A)第一回合結束後，紅球在 A 箱的機率為 $\frac{2}{3}$ (B)第一回合結束後，紅球在 B 箱的機率為 $\frac{2}{9}$ (C)第二回合結束後，紅球在 A 箱的機率為 $\frac{20}{81}$ (D)第三回合結束時，紅球在 A 箱的機率為 $\frac{547}{729}$。

(ACD) 10. 實係數多項式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，已知 $f(x)=0$ 沒有實根，若 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 為 $f(x)=0$ 的四個複數根，且 $\alpha+\beta=3-2i$，$\gamma\delta=4+i$，則下列哪些正確？
(A) $a=-6$ (B) $b=20$ (C) $c=-28$ (D) $d=17$。

(AD) 11. 某老師班上 40 人期末考數學成績 $x_1, x_2, \cdots, x_{40}$，算術平均數 $\mu_x=25$ 分，標準差 $\sigma_x=9$ 分，因為成績太低，老師想幫每位同學調整分數，老師提出兩種方案：

方案甲：每位同學都以 $y_i=2x_i+15$ 方式調分（調分後沒有超過 100 分的情形）

方案乙：每位同學都以 $w_i=\frac{x_i+150}{3}$ 方式調分（調分後沒有超過 100 分的情形）

試根據以上資料選出正確的選項。
(A)若採方案乙，原始分數超過 75 分的學生，調整之後的新分數反而會降低 (B)原始成績與方案甲成績的相關係數 > 原始成績與方案乙成績的相關係數 (C)若將全班的原始分數都標準化為 z 分數（$z_i=\frac{x_i-25}{9}$），則 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{40}^2=1$ (D)若有一位學生的原始分數為 25 分，但發現他作弊之後將他成績移除，則剩下的人採方案甲調整後分數的平均會高於採方案乙調整後分數的平均。

(ABC) 12. 坐標平面上，設 $O(0,0)$、$A(a_1,a_2)$、$B(b_1,b_2)$，若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=2$，且相異兩點 C, D 滿足 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OA}+(2-k)\overrightarrow{OB}$，其中 $k\neq 1$ 為一實數。試選出正確的選項。

(A)若 O, A, D 三點共線，則 $k=2$ (B) $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$ (C)$\triangle ABD$ 面積與 k 無關 (D)$\triangle ACD$ 面積與 k 無關。

第二部分：綜合題（共60分）

一、填充題（每題4分，共36分）

1. 設 $L_1: x+y=0$，$L_2: x-\sqrt{3}y=0$，點 $P(1,1)$ 對 L_1 鏡射後得點Q，再對 L_2 鏡射，得點R之坐標 $\underline{(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2})}$。

2. 若 a 為實數，$A=\begin{bmatrix}1 & a\\ -1 & -2\end{bmatrix}$，且 $A^3=I$，試求：$A+2A^2+3A^3+\cdots+20A^{20}=\underline{\begin{bmatrix}-21 & -21\\ 7 & 0\end{bmatrix}}$。

3. 連續投擲一枚均勻的硬幣10次，令隨機變數 X 代表正面出現的次數。若 X 的算術平均數為 μ，標準差為 σ，則 X 會落在與其平均相距小於或等於一個標準差範圍內的機率 $P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)$ 為何？$\underline{\frac{21}{32}}$。

4. 若 $x\in R$，滿足 $6\times24^x-2\times27^x+3\times16^x-18^x=0$，則 $\frac{2x-1}{3x}=\underline{\log_3 2}$。

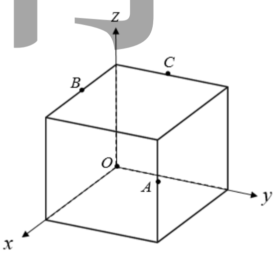
5. $a_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\underline{\frac{\pi}{4}}$。

6. 若實數 x、y、z 滿足 $\begin{cases}\frac{x}{1^2+4^2}+\frac{y}{1^2+5^2}+\frac{z}{1^2+6^2}=1\\ \frac{x}{2^2+4^2}+\frac{y}{2^2+5^2}+\frac{z}{2^2+6^2}=1\\ \frac{x}{3^2+4^2}+\frac{y}{3^2+5^2}+\frac{z}{3^2+6^2}=1\end{cases}$，求 $x+y+z=\underline{91}$。

7. 設 $f(x)$ 為多項式函數，若 $x^3f(x)$ 除以 $(3x-2)$ 的餘式為6，則 $x^2f(x)$ 除以 $(3x-2)$ 的餘式為 $\underline{9}$。

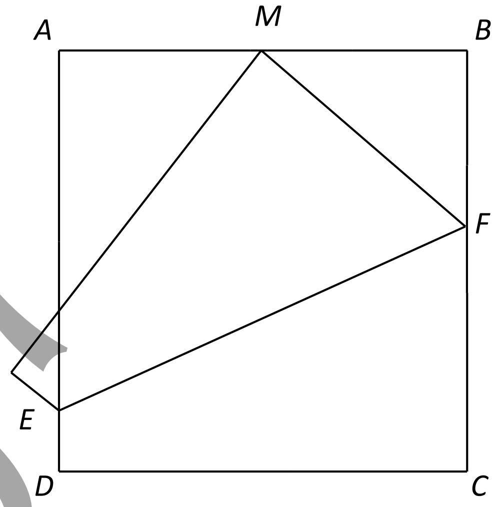
8. 已知 $a>0$ 是無理數，若 $P=a^3+3a^2-16a+6$，$Q=a^2-2a$，且 P、Q 皆為有理數，則 $a=\underline{1+\sqrt{7}}$。

9. 將邊長為2的正立方體放置於空間坐標系中，如圖，O 為原點，點 A、B、C 分別是其三稜上的中點。若通過 A、B、C 三點的平面與此正立方體截痕形狀的圖形為一五邊形，則另外兩點的坐標分別為 $\underline{(2,0,\frac{5}{3})\ ,\ (0,2,\frac{5}{3})}$。



二、計算證明題（每題8分，共24分）

1.將長 $\overline{AB}=240$ ，寬 $\overline{BC}=288$ 的長方形紙張對摺，讓頂點 C 剛好落在線段 $\overline{AB}$ 的中點 M 上，如下圖所示。若 $\overline{EF}$ 是摺線，則摺線 $\overline{EF}$ 的長度為多少？



2.求 $\int_1^e x\ln x dx=$

3.空間中三個非零向量 $\overrightarrow{OA}$ 、$\overrightarrow{OB}$ 、$\overrightarrow{OC}$ 滿足 $\angle AOB=30^\circ$ ，$\angle BOC=45^\circ$ 及 $\angle COA=60^\circ$ ，令 θ 為平面 AOB 與平面 BOC 的兩面角，試求 $|\cos\theta|=$ ？