

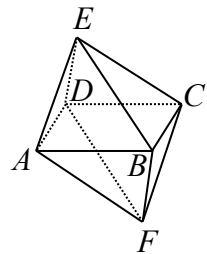
國立嘉義高級中學 112 學年度第 1 學期第 1 次教師甄選—數學科試題

一、填充題：(每題 5 分，共 90 分)

1. 將 2023 寫成連續正整數的和(至少兩個)的方法數有_____種。

2. 複數平面上， $\Omega_1 = \left\{ z \mid z \in \mathbb{C} \text{ 且 } \left| \frac{1}{z} - 1 \right| \geq 1 \right\}$ ， $\Omega_2 = \{ z \mid z \in \mathbb{C} \text{ 且 } |z-1| \leq 1 \}$ ，求 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 的區域面積為_____。

3. 如圖，有一正八面體的兩頂點為 $A(2,4,5)$ ， $C(4,4,7)$ ，若 $G(3,5,6)$ 在 $\triangle ABC$ 的內部，則 F 點的坐標為_____。



4. 若 n 為大於 5 的正整數，且存在實數 a, b, c, d, e 使得 $n^5 = aC_5^n + bC_4^n + cC_3^n + dC_2^n + eC_1^n$ ，則 $a+b+c+d+e$ 之值為_____。

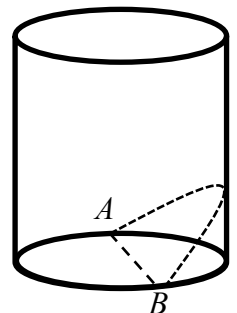
5. 考慮所有只用 0, 1, 2, 3 四種數字組成的序列，序列長度 n 是指該序列由 n 個數字組成(可重複出現)。令 $f(n)$ 為在所有長度 n 的序列中連續兩個零(即 00)出現的次數總和。例如長度 3 的序列中含有連續兩個零的有 000, 001, 002, 003, 100, 200, 300，其中 000 貢獻 2 次 00，其餘各貢獻 1 次 00，故 $f(3)=8$ 。求 $f(9)$ 有_____個正因數。

6. 若擲四顆相同的公正骰子，當四顆點數乘積為完全平方數時停止，否則再擲一次，請問投擲次數的期望值為_____。

7. 設 k 為整數，若 $\int_3^x |t-5| dt = 2x - \frac{2023}{k}$ 有三個相異實根，則 k 有_____個不同的可能值。

8. 有四個平行平面： $E_1: 3x+4y+5z=0$ 、 $E_2: 3x+4y+5z=1$ 、 $E_3: 3x+4y+5z=2$ 及 $E_4: 3x+4y+5z=3$ ，若一正四面體的四頂點 A, B, C, D 分別在 E_1, E_2, E_3 及 E_4 ，則此正四面體和 E_2 相交的截面積為_____平方單位。

9. 如圖所示，有一個底半徑為 6 公分的圓柱體，被一個通過直徑 AB 且與底面夾 30° 角的平面所截，試求所截出較小塊的立體體積為_____立方公分。

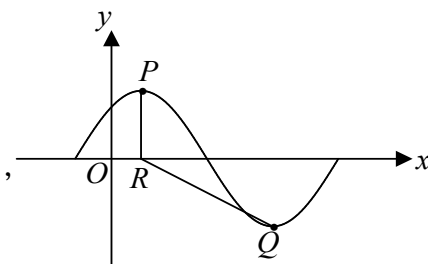


10. 求 $1 \cdot 3 \cdot C_1^{16} \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^{15} + 2 \cdot 4 \cdot C_2^{16} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{14} + 3 \cdot 5 \cdot C_3^{16} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^{13} + \dots + 16 \cdot 18 \cdot C_{16}^{16} \left(\frac{3}{4}\right)^{16}$ 之值_____。

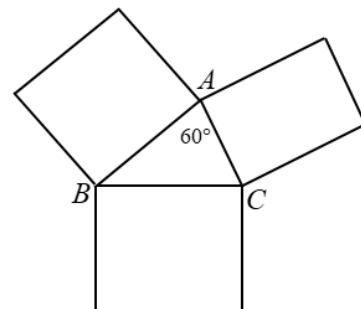
11. 一袋子中共有 8 顆球，其中 5 顆黑球、3 顆白球，每一次從袋中隨機取出 1 球，取後不放回袋中，共取 4 次且排成一列， X 表示取出的 4 球的變色數，如：若取出的 4 球為黑黑黑黑，則 $X=0$ ，若取出的 4 球為黑白黑黑，則 $X=2$ ，則 X 的期望值為_____。

12. 右圖為函數 $f(x) = a \sin(\frac{\pi}{3}x + \theta)$ 的部份圖形，其中 $a > 0$ ， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 。

若 P, Q 分別為圖形的最高點和最低點，且 $P(1, a)$ ， $R(1, 0)$ ， $\cos \angle PRQ = -\frac{1}{2}$ ，試求 a 值為_____。

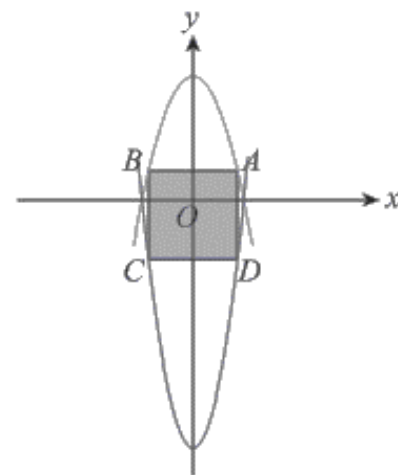


13. 如右圖， $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} + \overline{AC} = 10$ 且 $\angle A = 60^\circ$ ，由三角形各邊向外作寬度為 \overline{AC} 的長方形，將各邊長方形向上折起，形成一個無蓋的三角柱盒子，則此三角柱盒子的最大容積為_____。



14. 甲地失業率居高不下，為了鼓勵民眾勇於創業，提出了貸款年利率 1.5%，每年複利一次的優惠方案；乙地經濟過熱，為了鼓勵民眾將錢存進銀行，提出了存款年利率 3.53%，每年複利一次的優惠方案。小明突發奇想，從甲地銀行貸款 100 萬後，留下其中的 20 萬自用，並馬上將剩下的 80 萬存入乙地銀行，則最少_____年之後，小明存於乙地銀行的本利和能一次還清在甲地行積欠的貸款。(請取整數， $\log 1.02 \approx 0.0086$)

15. 如右圖，在兩拋物線 $y = -x^2 + 4$ 與 $y = 2x^2 - 8$ 所圍成的區域中，作一內接矩形 $ABCD$ ，其一組對邊 \overline{AB} ， \overline{CD} 分別平行於 x 軸，且兩頂點 A, B 在 $y = -x^2 + 4$ 上，而另兩頂點 C, D 在 $y = 2x^2 - 8$ 上，求矩形 $ABCD$ 的最大面積為_____。



16. $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = 2$ ， $\overline{AC} = 3$ ， $\overline{AB} = 4$ ，若 O, I 分別為 $\triangle ABC$ 之外心及內心，求 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AI} =$ _____。

17. 求兩平面 $2x + y + 2z + 3 = 0$ 、 $3x + 4y - 5 = 0$ 所夾「鈍角」之角平分面方程式為_____。

18. 已知橢圓 $\frac{x^2}{m} + y^2 = 1$ ($m > 1$) 和雙曲線 $\frac{x^2}{n} - \frac{y^2}{3} = 1$ ($n > 0$) 有相同的兩個焦點 F_1, F_2 ， P 點是它們的一個交點，則 $\tan \angle F_1 P F_2 =$ _____。

二、計算證明題：(10 分)

- 若 L 為過原點且與 x 軸正向夾角為 θ 的直線，則對直線 L 的鏡射變換表示的鏡射矩陣為何？請證明之。(7 分)
- 說明兩個鏡射矩陣相乘的結果為何種幾何變換。(3 分)